INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE XALAPA

2021

conoce tec

MATEMÁTICAS

NUEVO INGRESO 2021

Reserva Territorial S/N
Colonia Santa Bárbara
C.P. 91096. Xalapa, Ver.

@ITSXALAPA

WWW.XALAPA.TECNM.MX

CURSO DE INDUCCIÓN 2021

MATEMÁTICAS

TEMARIO

MATEMÁTICAS

1.- Pre-algebra

En esta guía recordarás y aprenderás los temas básicos que te preparan para tus asignaturas de Troco Común en tu Licenciatura.

1.1.- Operaciones con fracciones.

Fracciones

Una fracción está definida por dos elementos llamados **numerador** y **denominador**, en la cual el denominador representa el cuerpo que se quiere fraccionar y el numerador representa el número de partes que se quieren obtener de él. Así, la forma de una fracción es:

$$\textbf{Forma fraccionaria} = \frac{\textbf{Numerador}}{\textbf{Denominador}}$$

Toda forma fraccionaria se puede considerar como una división indicada, esto es:

$$\textbf{Forma fraccionaria} = \frac{\textbf{Dividendo}}{\textbf{Divisor}}$$

Fracciones propias

Las fracciones propias son menores a la unidad, ejemplo:

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{7}, \frac{9}{20}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}$$

En los ejemplos se puede observar que el número del denominador es mayor que el numerador.

Fracciones impropias y mixtas

Son aquellas que son mayores que la unidad. Ejemplo:

$$\frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{13}{9}, \frac{5}{2}, \frac{8}{7}$$

En los ejemplos se puede observar que el número del numerador es mayor que el del denominador.

Para convertir una fracción **impropia a mixta** se debe de realizar la división como se observa a continuación:

$$\frac{5}{4} \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 4 & 5 \\ & 1 \end{array} = 1\,\frac{1}{4} \qquad \frac{13}{9} \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 9 & 13 \\ & 4 \end{array} = 1\,\frac{4}{9}$$

$$\frac{5}{2} \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & 5 \\ & 1 \end{array} = 2\,\frac{1}{2}$$

En sentido inverso, de **mixta a propia** sería así:

$$5\,\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

17, x, 15, +

Existen fracciones que pueden ser la unidad y otros que son equivalentes, esto se da porque en realidad cualquier número entero puede ser fraccionario. Te invito a realizar las divisiones y encuentres los números enteros, así como también si simplificamos una fracción o multiplicamos ambas partes de la fracción por el mismo entero, ésta será su equivalente de la anterior.

$$\frac{4}{4}, \frac{8}{4}, \frac{6}{2}, \frac{37}{37}, \frac{35}{7}$$

Fracciones equivalentes

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{5}{10},\qquad \frac{3}{2}=\frac{4\times 3}{4\times 2}=\frac{12}{8},\qquad \frac{27}{6}=\frac{27\div 3}{6\div 3}=\frac{9}{2}$$

Fracción irreducible

Es una fracción en la cual el numerador y el denominador **no** tienen un factor común, excepto el **1**. La fracción $\frac{13}{5}$ es irreducible, porque no hay un factor que sea común a **13** y **5**, excepto el **1.**

Fracciones homogéneas

Las fracciones que tienen denominadores iguales, tales como $\frac{1}{7},\frac{2}{7}$ **y** $\frac{3}{7}$ son llamadas **homogéneas** porque tienen al **7** como denominador común.

Fracciones heterogéneas

Las fracciones $\frac{3}{4}$ **y** $\frac{5}{6}$ son llamadas **heterogéneas** porque tienen denominadores diferentes.

Suma y resta de fracciones

Cuando se tiene dos fracciones homogéneas es fácil operar solo se tiene que correr el denominador y sumar o restar los numeradores según su operación sin importar cuantas fracciones sean, es decir:

$$-\frac{5}{7}+\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{-5+6-2}{7}=-\frac{1}{7}$$

Cuando las fracciones son heterogéneas se pueden aplicar distintas formas de resolver fracciones se mencionan a continuación dos métodos:

1. Cuando se tienen dos fracciones al sumar o restar se aplica el método cruzado.

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{3}=\frac{21+30}{18}=\frac{51}{18}=\frac{17}{6} \qquad \frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{15-8}{12}=\frac{7}{12}$$

Multiplicamos

2. Cuando queremos sumar o restar más de dos fracciones este método se vuelve muy largo por lo que se recomienda seguir los siguientes pasos:

Ejemplo: $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}$

Primer paso

Se calcula el producto de los denominadores diferentes:

$$\mathbf{5 \times 3 = 15}$$

Segundo paso

Se convierten las fracciones dadas a sus fracciones equivalentes que tengan como denominador el producto de los denominadores diferentes:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times3}{5\times3}=\frac{12}{15}$$

Tercer paso

Se suman las fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{10+12}{15}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}$$

Ejemplo 2

$$\frac{17}{3}-\frac{8}{6}+\frac{3}{2}=$$

En ciertas ocasiones el denominador mayor es múltiplo de los otros dos denominadores por lo que se toma como el denominador que se tomará como común y convertimos las otras dos fracciones en equivalentes con denominador 6, buscamos un número que multiplicado por denominador dé 6 por esta ocasión.

$\frac{17\times2}{3\times2}=\frac{34}{6}$ $\quad \frac{8}{6}$ $\quad \frac{3\times3}{2\times3}=\frac{9}{6}$ $\qquad \frac{34}{6}-\frac{8}{6}+\frac{9}{6}=\frac{34-8+9}{6}=\frac{35}{6}$

Multiplicación y división de fracciones

Cuando se tiene un entero por una fracción, al entero se le agrega uno para volverlo fracción, si se tienen dos fracciones solo se multiplican los numeradores y denominadores, respectivamente. Ejemplos:

$$\mathbf{7\times\frac{6}{11}=\frac{7}{1}\times\frac{6}{11}=\frac{42}{11}}$$

$$\mathbf{\frac{5}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{5\times4}{3\times7}=\frac{20}{21}}$$

Para efectuar la división $\mathbf{3}\div\frac{7}{8}$, el dividendo $\mathbf{3}$ se multiplica por el recíproco del divisor $\left(\frac{7}{8}\right)$. De esta manera, se tiene:

$$\mathbf{\frac{3}{\frac{7}{8}}=3\times\frac{1}{\frac{7}{8}}=3\times\frac{8}{7}=\frac{24}{7}}$$

Para calcular el cociente de $\frac{7}{3}\div\frac{7}{8}$, el dividendo $\left(\frac{7}{3}\right)$ se multiplica por el recíproco del divisor $\left(\frac{7}{8}\right)$. De esta manera, se tiene:

$$\mathbf{\frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{8}}=\frac{7}{3}\times\frac{1}{\frac{7}{8}}=\frac{7}{3}\times\frac{8}{7}}=\frac{56}{21}=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

Si se observa el resultado se simplifica a su máxima expresión esta vez realizando una fracción equivalente dividiendo cada elemento de la fracción entre 7 y se reduce a $\frac{8}{3}$

También se puede realizar mediante el teorema de comparación o ***Ley del Sándwich*** que se da la siguiente forma:

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{8}} = \frac{56}{21} = \frac{8}{3}$$

Ejemplos de Ejercicios y problemas:

1.- ¿Cuál de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{5}$ es mayor?

Resolución

Para comparar **2** fracciones que tengan igual numerador y denominadores diferentes, se deben convertir a fracciones equivalentes que tengan como denominador común el producto de los denominadores de cada una:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\times5}{3\times5} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times3}{5\times3} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

Ya que **10 > 6**, entonces: $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

2.- Indica el orden ascendente y descendente de las fracciones $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{16}$ y $\frac{7}{8}$

Resolución

Para establecer el orden de las fracciones $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{16}$ y $\frac{7}{8}$, ya que **16** es múltiplo de **8** y **4**, las fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$ que tengan a **16** como denominador son:

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times4}{4\times4} = \frac{12}{16}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7\times2}{8\times2} = \frac{14}{16}$$

Como $\frac{5}{16} < \frac{12}{16} < \frac{14}{16}$, el orden ascendente es $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$

Como $\frac{14}{16} > \frac{12}{16} > \frac{5}{16}$, el orden descendente es $\frac{7}{8}, \frac{3}{4}$ y $\frac{5}{16}$

3.- Una librería recibe un lote de **375** libros y ubica $\frac{2}{5}$ del lote en el librero **A**, $\frac{2}{3}$ del lote en el librero **B** y los demás del lote en el librero **C**. Indica en el cuadro mostrado, el número de libros colocados en cada librero.

Librero A	Librero B	Librero C

Resolución

El número de libros ubicados en los libreros **A** y **B** es:

$$\textbf{Librero A} = \frac{2}{5} \times 375 = \frac{2 \times 375}{5} = 150 \text{ libros}$$

$$\textbf{Librero B} = \frac{1}{3} \times 375 = \frac{1 \times 375}{3} = 125 \text{ libros}$$

Los libros ubicados en el librero **C** se determinan restando los que se pusieron en los libreros **A** y **B** del total del lote:

$$\textbf{Librero C} = 375 - 150 - 125 = 100 \text{ libros}$$

Conclusión:

Librero A	Librero B	Librero C
150 libros	**125 libros**	**100 libros**

Actividades:

Un tornillo penetra $\frac{5}{6}$ **milímetros** cada **2** vueltas. ¿Cuántas vueltas tendrá que dar para penetrar **2.5 cm**?

1.2.- Proporcionalidad.

Una razón es la relación que hay entre 2 cantidades de la misma especie y se expresa como un cociente indicado, de modo que permite comparar una con respecto a la otra. La proporcionalidad se obtiene al comparar dos razones.

La proporcionalidad directa se da cuando ambas magnitudes aumentan, o bien, cuando las dos disminuyen.

Un ejemplo de esto se da cuando se calcula la velocidad de un automóvil entre la distancia sobre el tiempo. Cuando la distancia aumenta el tiempo también, así que ambas razones son directamente proporcionales.

Ejemplo:

Un automóvil ha tardado 90 minutos en recorrer 107 km. Suponiendo que va una velocidad constante, responde lo siguiente:

a) ¿Cuánto tardará en recorrer 316 km?

b) ¿Cuántos kilómetros recorrerá en cinco horas y 25 minutos?

Resolución:

Utilizando la regla de tres lo que hace es utilizar una tabla con valores de manera ordenada como en la siguiente tabla:

Distancia	**Tiempo**
107 km	90 minutos
316 km	265.79 minutos

a) Se multiplica cruzado km * minutos y se divide entre el valor restante 107 km Recuerda siempre acomodar las magnitudes similares en el mismo lado.

b) Primero se convierten las horas a minutos. Si una hora tiene 60 minutos, entonces 5 horas y 25 minutos son: 25 + 60 * 5 = 325 minutos

Distancia	**Tiempo**
107 km	90 minutos
386.38km	325 minutos

Observa que el cruzado se multiplica y lo que falta se divide.

Actividades:

1) En un plano de la ciudad, una calle de 350 metros de longitud mide 3.6 cm ¿Cuánto medirá sobre ese mismo plano otra calle que mide 20000 cm?

2) Para abonar un campo de cultivo se ha necesitado 42 300 kg de cierto abono que contiene un 28% de nitratos ¿Cuántos kilogramos se necesitaría de otro tipo de abono que contiene 34% de nitratos, para que el campo reciba la misma cantidad de nitratos?

Proporcionalidad Indirecta

Regla de tres indirectas

La proporcionalidad indirecta se da cuando una de las magnitudes aumenta y la otra disminuye o viceversa, un ejemplo de esto se da cuando dos personas están pintando una pared, ellos terminan en un tiempo determinado. Si se les suma otra persona y los apoya, acabarán en menos tiempo. Entre más trabajadores, es menor el tiempo de trabajo.

Ejemplo:
Hace una semana 8 camiones trasportaron mercancía del almacén al centro comercial, estos hicieron 15 viajes. Hoy se descompusieron 2 camiones ¿cuántos viajes tienen que hacer el resto de los camiones para traer la misma cantidad de mercancía al centro comercial si estos que restan tienen las mismas dimensiones?

Resolución:

Se utiliza el mismo concepto, pero invirtiendo. Observemos el siguiente cuadro:

Camiones	Viajes
8	15
6	20 viajes

Esta operación se realiza inversamente a la regla de tres directa. Se multiplican las primeras dos magnitudes diferentes de manera lineal y de forma cruzada se divide entre la magnitud a buscar, ((8*15) /6). Así obtendremos que se necesitará realizar 31 y viajes para tener la misma cantidad que la anterior semana.

Actividad:

1.- En una expedición, 8 investigadores llevan raciones para 15 días; si antes de partir se integran al grupo otros 2 investigadores, ¿para cuántos días alcanzarán las raciones?

Proporcionalidad múltiple

Regla de tres múltiple

La proporcionalidad múltiple se da entre tres o más magnitudes. Para explicarla resolveremos el siguiente ejercicio:
90 obreros necesitan de 80 días para construir un muro de 120 m de longitud. ¿Cuántos obreros serían necesarios para construir 150 m de muro en un tiempo de 60 días?

Resolución:

Primero anotamos en una tabla los valores.

OBREROS	DÍAS	LONGITUD
90	80	120
	60	150

Siempre iniciaremos resolviendo la magnitud faltante. En este ejemplo desconocemos el dato de los obreros. Se compararán obreros y días, al igual que obreros con longitud. Como podemos ver, en el problema se sabe que entre más obreros se tengan, menos días se van a necesitar para construir el muro, se trata de una proporción indirecta. Entre más obreros se tengan, estos construirán un muro de mayor longitud, por lo tanto, será una proporción directa. Sabiendo esto, apliquemos los siguientes pasos:

Primero trazaremos una línea para formar las razones en forma de fracción, en el numerador (la parte de arriba) multiplicaremos y en la de abajo (denominador) se pondrá lo que se va a dividir. Como segundo paso, plantearemos la proporcionalidad indirecta. Si es inversa, empezamos a multiplicar de manera lineal, esto es 90 * 80 y después se dividiría por el cruzado que es 60. Observemos:

$$\frac{90 \times 80}{60}$$

En el tercer paso, comparamos los obreros con la longitud. Entonces tendremos que es una proporcionalidad directa. Como se vio antes, se multiplica de forma cruzada (90 * 150) y se divide el resultado entre 120:

$$\frac{90 \times 80 \times 150}{60 \times 120} = \frac{1080000}{7200} = 150\ obreros$$

Así, encontramos que se necesitarían 150 obreros para construir un muro de 150 m de longitud en un tiempo de 60 días.

Actividades:

1.- Un campamento de la Cruz Roja alimenta a 1800 refugiados, tienen víveres para tres meses si se distribuyen raciones de 800 gramos por día, ¿Cuál debería ser la ración si hubiese 2100 refugiados y estos víveres tuvieran que durar 4 meses?

2.- Se emplean 14 días en hacer una obra de 15m de largo, 8m de ancho y 4.75 m de alto, a razón de 6 horas de trabajo cada día. Si se emplean 8 días en hacer otra obra del mismo ancho y del doble de largo trabajando 7 horas diarias y siendo la dificultad de esta obra los ¾ de la anterior ¿cuál es la altura de la obra?

1.3.- Jerarquía de operaciones

Debemos de recordar que para resolver operaciones continuas se debe respetar el siguiente orden:

() [] {} Paréntesis

a^b √ Potencias y raíces

. x ÷ Multiplicaciones y divisiones

+ - Sumas y restas

Primero se resuelve lo que está entre paréntesis, después las raíces y potencias, enseguida las multiplicaciones y divisiones, finalmente las sumas y las restas. Cuando se tienen dos operaciones del mismo escalón como una suma y una resta se debe resolver de derecha a izquierda. Como en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

a. $6 + 3 \times 5 = 6 + 15 = 21$
b. $8 + 3 \times 7 - 5 = 8 + 21 - 5 = 24$
c. $8 + 20 \div 2 \times 2 = 8 + 10 \times 2 = 8 + 20 = 28$

Ahora la manera correcta para no crear confusión es usar paréntesis como se muestra en los siguientes ejercicios:

a) 6 (-1)³ - 4= 6(-1) - 4 = - 6 - 4 = -10

En el ejercicio anterior no aparece el proceso de los exponentes, pero brevemente se puede decir que un número con un exponencial se significa que este número se multiplicará por sí mismo las veces que indique el exponente (-1) (-1) (-1) = -1

b) Calcula el valor de $\left\{-\mathbf{23}+\frac{[\mathbf{5}(\mathbf{4}^{\mathbf{2}}-\sqrt{\mathbf{64}})-\mathbf{32}\div\mathbf{8}]}{\mathbf{18}}\right\}$

Resolución

Indicando paso a paso las operaciones realizadas:

$=\left\{-\mathbf{23}+\frac{[\mathbf{5}(\mathbf{16}-\mathbf{8})-\mathbf{4}]}{\mathbf{18}}\right\}$

$=\left\{-\mathbf{23}+\frac{[\mathbf{5}(\mathbf{8})-\mathbf{4}]}{\mathbf{18}}\right\}$

$=\left\{-\mathbf{23}+\frac{[\mathbf{40}-\mathbf{4}]}{\mathbf{18}}\right\}$

$=\left\{-\mathbf{23}+\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{18}}\right\}$

$=-\mathbf{23}+\mathbf{2}=\mathbf{-21}$

c) Calcula $\left[\mathbf{8}\left\{(\mathbf{4}-\mathbf{7})^{\mathbf{3}}+\mathbf{42}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{21}}+\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{7}}\right)\right\}\right]-\sqrt{\mathbf{121}}\times\mathbf{4}$

Resolución

Indicando paso a paso las operaciones realizadas:

$=\left[\mathbf{8}\left\{(-\mathbf{3})^{\mathbf{3}}+\mathbf{42}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{21}}+\frac{\mathbf{33}}{\mathbf{21}}\right)\right\}\right]-\mathbf{11}\times\mathbf{4}$

$=\left[\mathbf{8}\left\{-\mathbf{27}+\mathbf{42}\left(\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{21}}\right)\right\}\right]-\mathbf{44}$

$=\left[\mathbf{8}\left\{-\mathbf{27}+\mathbf{35}\left(\frac{\mathbf{42}}{\mathbf{21}}\right)\right\}\right]-\mathbf{44}$

$=[\mathbf{8}\{-\mathbf{27}+\mathbf{35}(\mathbf{2})\}]-\mathbf{44}$

$=[\mathbf{8}\{-\mathbf{27}+\mathbf{70}\}]-\mathbf{44}$

$=[\mathbf{8}\{\mathbf{43}\}]-\mathbf{44}$

$=\mathbf{344}-\mathbf{44}$

=300

d) Calcula $\dfrac{\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{25}+\frac{3}{40}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{8}-\frac{1}{12}} =$

Resolución

Indicando paso a paso las operaciones realizadas:

$$\frac{\left(\frac{20}{200}+\frac{16}{200}+\frac{15}{200}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{3}{24}-\frac{2}{24}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{51}{200}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{24}}$$

$$= \frac{\left(\frac{51}{1200}\right)}{\frac{1}{24}}$$

$$= \frac{1224}{1200} = \frac{408}{400} = \frac{204}{200} = \frac{102}{100} = \frac{51}{50} = 1\frac{1}{50}$$

Actividades

1) $\left[3\left\{(2-5)^2-4\left(\frac{3}{2}-\frac{10}{4}\right)^3\right\}+3\left(\frac{7}{9}\right)\right]-\sqrt{49}$

2) $-\{-2-[-8(5+2)]-1-[3-5\cdot 2]\}$

3) $\frac{2}{3}[-4^2-(-3+1)/2]-(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3})$

Nota: para este ejercicio se tomará la potencia al cuadrado como la regla que si no se encuentra todo entre paréntesis entonces la potencia solo afecta al número

4) $2(-3)^2-\sqrt{16}-[(-2+8)\div 2]$

5) $\left(\dfrac{\frac{1+\frac{1}{2}}{3}+\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}{\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}}\right)\left(23\frac{1}{2}\div\frac{47}{12}\right)$

1.4.- Conceptos Algebraicos

Monomio

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural. Se llama parte literal de un monomio a las letras con sus exponentes. Se llama coeficiente de un monomio al número que aparece multiplicando a la parte literal. Normalmente se coloca al principio. Si es un 1 no se escribe y nunca es 0 ya que la expresión completa sería 0. Los coeficientes de un monomio pueden no ser enteros (por ejemplo 0.6 ; 1/2 ; -5/6; etc.) aunque normalmente serán enteros y así lo vamos a suponer en este tema. Se denomina grado de un monomio a la suma de los exponentes de las letras.

Ejemplos:

expresiones $\frac{3x+5}{x^2-8x+2}$ y $x^2 + 2\sqrt{x} - 9x + \frac{1}{x^2}$,

Polinomio

Un polinomio es una suma de términos algebraicos que contiene una o más variables, en el cual ninguna de ellas puede aparecer en el denominador ni como exponente ni dentro del signo radical.

Un polinomio en función de la variable **x** tiene la forma:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

en la cual **n** es un entero no negativo y **a** es un número real.

Ejemplos:

a) $2x^4 + 7x^2 - 4$

b) $x^5 - 5x^3y^3 + 2x + 3y - 1$

c) $-7y^5 + 9y^3 + 2y - 6$

Es necesario siempre conocer el coeficiente de la siguiente expresión para poder operar del a siguiente expresión $5y - 3ax^2 + \frac{7abc}{2yz}$ los coeficientes son $5, -3$ y $\frac{7}{2}$, respectivamente

Grado de un término algebraico

El grado de un término algebraico es el exponente de la literal que esté elevada a la mayor potencia. Cuando un término tenga **2** o más literales, el grado se especifica con respecto a cada una de ellas; el **grado absoluto** de un término es la suma de los exponentes de las literales que contiene.

Ejemplo de expresiones y grado

a) 2a

b) $4b^3$

c) 9xy

d) $5u^2v^4$

a) Cuando los números y literales aparecen sin exponentes en las expresiones algebraicas, se considera que su exponente es **1**. De acuerdo con esto:

2a = $2a^1$, por lo tanto**, 2a es de primer grado**

b) Como el exponente de **b** es **3**, **$4b^3$ es de tercer grado**

c) El grado absoluto de **9xy es 2**, porque la suma de los exponentes de **x** e **y** es **(1 + 1) = 2**; **9xy es de primer grado en x y de primer grado en y**

d) $5u^2v^4$ es de **sexto grado** en **uv,** porque **(2 + 4) = 6; de segundo grado en u,** porque su exponente es **2 y de cuarto grado en v,** porque su exponente es **4**.

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el del término de mayor grado que contenga.

Ejemplos:

1. Determina el grado del polinomio $\mathbf{2x + 4y + y^2 + 3xy^3 + x^3y^5 - 9}$

Se puede observar que el término de mayor grado es $\mathbf{x^3y^5}$**,** porque su grado es **(3 + 5) = 8**, el cual es más grande que todos los demás términos. Por lo tanto, el polinomio es de **octavo grado**.

2. ¿Cuál es el grado del polinomio $\mathbf{\frac{1}{2}a^4b + \frac{1}{3}a^2b^2 - \frac{1}{4}c^2}$?

Quinto grado, porque el término de mayor grado es $\mathbf{\frac{1}{2}a^4b}$ y la suma de sus exponentes es **5**.

Orden de un polinomio

Un polinomio se puede ordenar en forma ascendente o en forma descendente, de acuerdo con el exponente de las literales de los términos que contenga. Un polinomio en **orden ascendente** es aquel en el que los exponentes de la misma literal aumentan de forma sucesiva y un polinomio es de **orden descendente** cuando los exponentes de la misma literal disminuyan de forma sucesiva.

Ejemplo:

1. $\mathbf{5x^2 - 20 + x^5 - 2x^3 + x}$

ordenando esta expresión forma ascendente queda $\mathbf{-20 + x + 5x^2 - 2x^3 + x^5}$
ordenado en forma descendente queda $\mathbf{x^5 - 2x^3 + 5x^2 + x - 20}$

Cuando un polinomio está en función de **2** variables, se debe referir la variable a la cual se ordena.

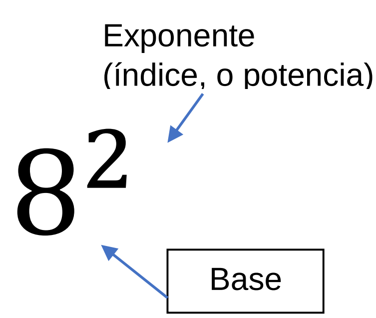
Términos semejantes en un polinomio

En un polinomio, sus términos semejantes son aquellos que tienen las mismas literales elevadas a la misma potencia. En el siguiente polinomio $\mathbf{5x^2 - 8xy + 2x^2 + 27 - 4x^2}$ los términos semejantes son $\mathbf{5x^2}$, $\mathbf{2x^2}$ $\mathbf{y}$ $\mathbf{-4x^2}$

De la siguiente expresión $\mathbf{9u^2 + 4uv - 7u^2 + 27 - 5uvx - 31 + u^2 - uvz}$ los términos semejantes son $\mathbf{9u^2, -7u^2}$ **y** $\mathbf{u^2}$ porque tienen las mismas literales elevadas a la misma potencia.

1.5.- Potenciación y radicación

La potenciación es una forma de acortar una multiplicación. Se encuentra inconscientemente cuando se dicen metros cuadrados (m^2), esta se trata de una regla de producto de exponentes, por ello es muy importante conocer estas referencias antes de estudiar álgebra directamente. En la siguiente imagen se tiene una base y un exponente, la base es un número cualquiera que está elevado a una potencia



La potencia es el número de veces que se va a multiplicar la base por sí misma, como se puede observar en el siguiente ejemplo:

$$\boxed{2^6 = (2)(2)(2)(2)(2)\ (2) = 32}$$

En los siguientes dos cuadros se muestra lo que pasa cuando se tiene un número negativo elevado a una potencia. Se observa que además de la base también se multiplica el signo, como se explica en las figuras. Si un número negativo se eleva a un exponente par el resultado será un número positivo y si se eleva a un exponente impar, el resultado es un número negativo.

$(-2)^4 \longrightarrow -2\ (-2)\ (-2)\ (-2)$

$(4)\ \ (-2)$

$(-8)\ \ (-2)$

16

$(-2)^5 \longrightarrow (-2)\ (-2)\ (-2)\ (-2)\ (-2)$

$(4)\ \ (-2)$

$(-8)\ \ (-2)$

$(16)\ (-2)$

- 32

Los paréntesis (()), el punto en medio (•), dos líneas cruzadas (x), o el símbolo de asterisco (*) se usan para representar una multiplicación. En el álgebra y otras áreas de las matemáticas se usa muy poco el símbolo de x para multiplicar porque esta letra se utiliza para señalar una incógnita.

Propiedades de las potencias

Observa con atención la siguiente imagen que define cada una de las reglas exponentes:

Propiedades de las Potencias

$(a^m)\ (a^n) = \mathbf{a^{n+m}}$

$(a^m)^n = \mathbf{a^{n\cdot m}}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = \boldsymbol{a^{m-n}}$

$\mathbf{a^0 = 1}$

$\mathbf{0^n = 0}$

$(a\cdot b)^n = \mathbf{a^n\cdot b^n}$

$\mathbf{a^1 = a}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \mathbf{a^n/b^n}$

$\mathbf{1^n = 1}$

Propiedad $\mathbf{a^m a^n = a^{(m+n)}}$

Cuando se calcula el producto de dos potencias con la misma base, se mantiene la misma base, pero se suman los exponentes.

1. Reduce $\frac{1}{6}\mathbf{x^5(-3x^2)(4x^7)}$ a su mínima expresión.

Resolución

Primero se efectúan las operaciones con los coeficientes y después las de las literales con exponentes, utilizando $\mathbf{a^m a^n = a^{(m+n)}}$:

$$\frac{1}{6}\mathbf{x^5(-3x^2)(4x^7)} = \left[\left(\frac{1}{6}\right)(-3)(4)\right]\left[\mathbf{x^{(5+2+7)}}\right] = -2\mathbf{x^{14}}$$

Propiedad $\mathbf{(a^m)^n = a^{mn}}$

- Cuando se tiene un valor elevado a una potencia y este a su vez está elevado a otra potencia, la regla nos dice que es igual a la base pero los exponentes se multiplican.

2. Calcula el resultado de $\mathbf{(4^4)^2}$

Resolución

Aplicando la propiedad de los exponentes $\mathbf{(a^m)^n = a^{mn}}$, resulta:

$$(4^4)^2 = 4^{4(2)} = 4^8 = 4(4)(4)(4)(4)(4)(4)(4)$$

$$(4^4)^2 = 65\,536$$

3. Realiza las operaciones indicadas en $\mathbf{(3a^{\frac{3}{5}})^5}$ y reduce el resultado a su mínima expresión.

Resolución

Aplicando la ley de los exponentes que establece que **$(a^m)^n = a^{mn}$**:

$$(3a^{\frac{3}{5}})^5 = (3^5)\left(a^{\left(\frac{3}{5}\right)(5)}\right) = 243\left(a^{\frac{15}{5}}\right) = 243a^3$$

Propiedad $(\mathbf{ab})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^n b^n}$

Propiedad $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}}$

- Cuando se tiene un producto con distinta base elevado a una potencia, se debe elevar cada una de las potencias. Lo mismo en la división: se elevan a la potencia señalada el numerador y el denominador.

4. Determina $(\mathbf{7xyz})^{\mathbf{3}}$

Resolución

De la propiedad de los exponentes $(\mathbf{ab})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^n b^n}$, se tiene:

$(\mathbf{7xyz})^{\mathbf{3}} = \mathbf{7^3x^3y^3z^3}$

$(\mathbf{7xyz})^{\mathbf{3}} = \mathbf{343\,x^3y^3z^3}$

Propiedad $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}}$

Permite efectuar una división elevada a un exponente **n**.

5. Simplifica el resultado de $\left(\frac{\mathbf{-4yz}}{\mathbf{5x}}\right)^{\mathbf{3}}$.

Resolución

Aplicando la propiedad de los exponentes $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}}$:

$$\left(\frac{\mathbf{-4yz}}{\mathbf{5x}}\right)^{\mathbf{3}} = \frac{(\mathbf{-4yz})^{\mathbf{3}}}{(\mathbf{5x})^{\mathbf{3}}} = \frac{(\mathbf{-4})^{\mathbf{3}}\mathbf{y^3z^3}}{(\mathbf{5})^{\mathbf{3}}\mathbf{x^3}}$$

$$\left(\frac{\mathbf{-4yz}}{\mathbf{5x}}\right)^{\mathbf{3}} = -\frac{\mathbf{64y^3z^3}}{\mathbf{125x^3}}$$

Propiedad $\frac{\mathbf{a^m}}{\mathbf{a^n}} = \mathbf{a^{m-n}}$

- En la división de potencias con la misma base, el resultado será la misma base y los exponentes se restan.

6. Simplifica la expresión $\frac{\mathbf{z^{-3}}}{\mathbf{z^{-5}}}$

Resolución

Para dividir potencias de una misma base, se aplica la ley de los exponentes $\frac{\mathbf{a^m}}{\mathbf{a^n}} = \mathbf{a^{m-n}}$, en la cual al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor, de aquí que:

$\frac{\mathbf{z^{-3}}}{\mathbf{z^{-5}}} = \mathbf{z^{[-3-(-5)]}} = \mathbf{z^{(-3+5)}}$

$\frac{\mathbf{z^{-3}}}{\mathbf{z^{-5}}} = \mathbf{z^2}$

7. Emplea la ley de los exponentes que establece que $\frac{\mathbf{a^m}}{\mathbf{a^n}} = \mathbf{a^{m-n}}$ para reducir la expresión $\frac{\mathbf{(7x)^{-4}}}{\mathbf{(7x)^{-6}}}$.

Resolución

$$\frac{\mathbf{(7x)^{-4}}}{\mathbf{(7x)^{-6}}} = \mathbf{(7x)^{[-4-(-6)]}} = \mathbf{(7x)^2} = \mathbf{(7)^2x^2} = \mathbf{49x^2}$$

Propiedad $\mathbf{b^{-n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b^n}}$ y $\mathbf{b^n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b^{-n}}}$

Permite trasladar potencias del numerador al denominador y viceversa.

8. Dado el término $\frac{\mathbf{c^{-2/3}}}{\mathbf{x^{-2}}}$, exprésalo:

a) Con la literal del numerador ubicada en el denominador

b) Con la literal del denominador ubicada en el numerador

Resolución

a) Para ubicar la potencia del numerador al denominador, se emplea la propiedad $\mathbf{b^{-n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b^n}}$:

$$\frac{c^{-2/3}}{x^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{c^{2/3}}\right)}{x^{-2}} \qquad \left[\frac{\frac{1}{c^{2/3}}}{\frac{x^{-2}}{1}} = \frac{1(1)}{c^{2/3}(x^{-2})}\right]$$

$$\frac{c^{-2/3}}{x^{-2}} = \frac{1}{c^{2/3}x^{-2}}$$

b) Para ubicar la potencia del denominador al numerador, se emplea la propiedad $\mathbf{b^{-n}} = \frac{1}{b^n}$:

$$\frac{c^{-2/3}}{x^{-2}} = \frac{c^{-2/3}}{\frac{1}{x^2}} \qquad \left[\frac{\frac{c^{-2/3}}{1}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2c^{-2/3}}{1(1)}\right]$$

$$\frac{c^{-2/3}}{x^{-2}} = x^2c^{-2/3}$$

- Existen 4 regularidades que se han vuelto regla: cuando elevamos una base a la potencia cero, esta siempre será igual a 1: ($5^0 = 1$, $x^0 = 1$, $2586^0 = 1$). Si la base no tiene potencia quiere decir que tiene potencia de 1 (todo número o literal siempre tiene una potencia)por lo que al elevar a la potencia 1 da la misma base $x^1 = x$. Se tienen dos valores que al elevarlos a cualquier potencia siempre dan lo mismo, estos son cero y uno.

Radicación

Un radical es cualquier expresión de la forma general $\sqrt[n]{a} = b$, en la cual:

- $\sqrt{}$ es el signo radical
- $\mathbf{n}$ es el índice del radical
- a es el radicando
- b es la raíz n – ésima de (a)

Un índice par es **la raíz cuadrada de un número positivo**, la cual es uno de **sus dos factores iguales con distinto signo**:

$\sqrt{16} = \pm 4$ **porque** $(4)^2 = 16$ **y** $(-4)^2 = 16$

$\sqrt[4]{625} = \pm 5$ **porque** $(5)^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ y $(-5)^4 = 625$

Nota: El signo negativo elevado a una potencia par es siempre positivo

Nota: Se observa que la raíz de 16 no tiene índice por lo que se sobre entiende que su índice es 2 de ahí el término raíz cuadrada.

Por lo general, en los radicales con índice par se proporciona la raíz positiva como la raíz principal:

$\sqrt{81} = 9$ **porque** $(9)^2 = 9 \times 9 = 81$

$\sqrt{4a^4b^2} = 2a^2b$ **porque** $(2a^2b)^2 = 4a^4b^2$

El caso representativo de **un índice impar** es **la raíz cúbica de un número**, la cual es **uno de sus 3 factores iguales con signo igual al del número del radicando**. Así:

$\sqrt[3]{-27} = -3$ **porque** $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

$\sqrt[5]{32} = 2$ **porque** $(2)^5 = (2) \times (2) \times (2) \times (2) \times (2) = 32$

Radical racional

Un radical es racional si su raíz **es** exacta. Algunos ejemplos de radicales racionales son $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[4]{81}$ y $\sqrt[5]{243}$, ya que:

$\sqrt{49} = 7$ **porque** $7^2 = 49$

$\sqrt[3]{-8} = -2$ **porque** $(-2)^3 = 8$

$\sqrt[4]{81} = 3$ **porque** $3^4 = 81$

$\sqrt[5]{1\,024} = 4$ **porque** $4^5 = 1\,024$

Radical irracional

Un radical es irracional si su raíz **no** puede extraerse con exactitud, sólo puede darse una aproximación de ella. Ejemplos de radicales irracionales son: $\sqrt{\mathbf{3}}$, $\sqrt[3]{\mathbf{-90}}$, $\sqrt[4]{\mathbf{27}}$ y $\sqrt[5]{\mathbf{200}}$,

- $\sqrt{\mathbf{3}}$ es irracional porque es imposible encontrar un número que elevado al cuadrado dé **3**, sólo se puede obtener una aproximación: $\sqrt{\mathbf{3}} = \mathbf{1.732}$ ...
- $\sqrt[3]{\mathbf{-90}}$ es irracional porque no existe un número que elevado al cubo dé $\mathbf{-90}$, sólo se puede obtener una aproximación: $\sqrt{\mathbf{-90}} = \mathbf{-4.481}$ ...
- $\sqrt[4]{\mathbf{27}}$ es irracional porque sólo se puede obtener una aproximación: $\sqrt[4]{\mathbf{27}} = \mathbf{2.279}$ ...
- $\sqrt[5]{\mathbf{200}}$ es irracional porque sólo se puede obtener una aproximación: $\sqrt[5]{\mathbf{200}} = \mathbf{2.885}$ ...

Propiedades de los radicales

1. Propiedad $\left(\sqrt[n]{\mathbf{x}}\right)^{\mathbf{n}} = \mathbf{x}$

La raíz de un radical elevado a la potencia de su índice es igual al radicando.

Las raíces de los radicales $\left(\sqrt[5]{\mathbf{8}}\right)^{\mathbf{5}}$**,** $\left(\sqrt[3]{\mathbf{972}}\right)^{\mathbf{3}}$ y $\left(\sqrt{\mathbf{2\,916x^2y^5z^8}}\right)^{\mathbf{2}}$ son, respectivamente:

$$\left(\sqrt[5]{\mathbf{8}}\right)^{\mathbf{5}} = \mathbf{8}$$

$$\left(\sqrt[3]{\mathbf{972}}\right)^{\mathbf{3}} = \mathbf{972}$$

$$\left(\sqrt{\mathbf{2\,916x^2y^5z^8}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{2\,916x^2y^5z^8}$$

2. Propiedad $\sqrt[n]{\mathbf{x}} = \mathbf{x^{1/n}}$

La raíz de un radical con un índice **n** es igual al radicando elevado al recíproco de dicho índice.

Las raíces de $\sqrt[3]{\mathbf{343}}$**,** $\sqrt[5]{\mathbf{1\,024}}$ **y** $\sqrt{\mathbf{s^6}}$ son, respectivamente:

- En $\sqrt[3]{\mathbf{343}}$, $\mathbf{n = 3}$ y $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$, de aquí que:

  $\sqrt[3]{\mathbf{343}} = (\mathbf{343})^{\mathbf{1/3}} = \mathbf{7}$

- En $\sqrt[5]{\mathbf{1\,024}}$, $\mathbf{n = 5}$ **y** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$:

  $\sqrt[5]{\mathbf{1\,024}} = (\mathbf{\,1\,024})^{\mathbf{1/5}} = \mathbf{4}$

- En $\sqrt{\mathbf{s^6}}$, $\mathbf{n = 2}$ **y** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$:

  $\sqrt{\mathbf{s^6}} = (\mathbf{s^6})^{\mathbf{1/2}} = \mathbf{s^{6/2}}$ (De la propiedad de los exponentes $(\mathbf{a^m})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^{mn}}$)

  $\sqrt{\mathbf{s^6}} = \mathbf{s^3}$

3. Propiedad $\sqrt[n]{\mathbf{xy}} = \sqrt[n]{\mathbf{x}} \cdot \sqrt[n]{\mathbf{y}}$

La raíz n-ésima de un producto de números algebraicos es igual al producto de la raíz n-ésima de cada factor del radicando.

- $\sqrt[3]{\mathbf{8 \times 27}} = \sqrt[3]{\mathbf{8}} \cdot \sqrt[3]{\mathbf{27}} = \mathbf{2 \times 3 = 6}$
- $\sqrt{\mathbf{121 \times 36 \times 49}} = \sqrt{\mathbf{121}} \times \sqrt{\mathbf{36}} \times \sqrt{\mathbf{49}} = \mathbf{11 \times 6 \times 7 = 462}$
- $\sqrt[4]{\mathbf{625y^4z^8}} = \sqrt[4]{\mathbf{625}} \cdot \sqrt[4]{\mathbf{y^4}} \cdot \sqrt[4]{\mathbf{z^8}}$

  Aplicando la propiedad $\sqrt[n]{\mathbf{x}} = \mathbf{x^{1/n}}$ en cada factor:

  $\sqrt[4]{\mathbf{625}} = (\mathbf{5^4})^{\mathbf{1/4}} = \mathbf{5^{4/4}} = \mathbf{5}$

  $\sqrt[4]{\mathbf{y^4}} = (\mathbf{y^4})^{\mathbf{1/4}} = \mathbf{y^{4/4}} = \mathbf{y}$

  $\sqrt[4]{\mathbf{z^8}} = \mathbf{z^{8/4}} = \mathbf{z^2}$

  Por lo tanto:

  $\sqrt[4]{\mathbf{625y^4z^8}} = \mathbf{5yz^2}$

4. Propiedad $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

La raíz de un cociente es igual a la raíz del numerador dividida entre la raíz del denominador.

- $\sqrt[3]{\frac{512}{64}} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{8}{4} = 2$
- $\frac{\sqrt[3]{297}}{\sqrt[3]{11}} = \sqrt[3]{\frac{297}{11}} = \sqrt[3]{27} = 3$
- $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^9}} = \frac{\sqrt[3]{a^6}}{\sqrt[3]{b^9}}$

  Aplicando la propiedad $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ en el numerador y denominador, respectivamente:

  $\sqrt[3]{a^6} = (a^6)^{1/3} = a^{6/3} = a^2$

  $\sqrt[3]{b^9} = (b^9)^{1/3} = b^{9/3} = b^3$

  Sustituyendo:

  $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^9}} = \frac{a^2}{b^3}$

5. Propiedad $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

La raíz m–ésima de un radical con un índice **n** es igual a otro radical cuyo índice es el producto **mn** con el mismo radicando.

- $\sqrt[6]{729}$

Como $6 = 3 \times 2$, entonces, **m = 3** y **n = 2**:

$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$ $\quad (\sqrt[2]{729} = 27)$

- $\sqrt{\sqrt[3]{4\,096}}$

Con **m = 2 y n = 3**:

$\sqrt{\sqrt[3]{4\,096}} = \sqrt[6]{4096} = \sqrt[6]{4^6}$ $\quad (4\,096 = 4^6)$

De la propiedad $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$**:**

$\sqrt{\sqrt[3]{4\,096}} = (4^6)^{1/6} = 4^{6/6}$

$\sqrt{\sqrt[3]{4\,096}} = 4$

- $\sqrt[3]{\sqrt[3]{ab^2}}$

Con **m = 3** y **n = 3**:

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{ab^2}} = \sqrt[9]{ab^2}$

6. Propiedad $a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}$

Los factores fuera de un radical se pueden introducir al mismo, elevándolos a una potencia de exponente igual al índice del radical.

$5\sqrt{8} = \sqrt{5^2(8)} = \sqrt{200}$

Se puede realizar lo inverso, esto es, se puede pasar como factor del radical un factor parcial o total del radicando, descomponiendo el radicando en dos factores tales que uno de ellos sea la potencia máxima de exponente divisible entre el índice del radical.

$\sqrt{50} = \sqrt{25(2)} = \sqrt{5^2(2)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$$\sqrt{18x} = \sqrt{9(2x)} = \sqrt{3^2(2x)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2x} = 3\sqrt{2x}$$

Transformación de radicales a formas exponenciales

Un radical representa un exponente fraccionario, en donde **el numerador m del exponente indica la potencia del radicando** y **el denominador señala el índice n del radical**. Expresándolo en forma simbólica:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Para el caso particular en que **m = n**:

$\sqrt[n]{x^n} = x \qquad \left(x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x\right)$

- $\sqrt[3]{2^9} = 2^{9/3} = 2^3 = 8$
- $\sqrt[4]{3^{12}} = 3^{12/4} = 3^3 = 27$
- $\sqrt[7]{12^7} = 12^{7/7} = 12^1 = 12$

Radicales semejantes

Los radicales semejantes son los que tienen iguales el índice y el radicando. Para determinar si dos o más radicales son semejantes, es necesario aplicar las propiedades de los radicales y reducirlos a su forma más simple, de modo que sólo difieran por sus coeficientes. De esta manera, si se quiere saber si son semejantes los radicales $\sqrt{50}$ y $\sqrt{18}$, se encuentran los factores de los radicandos de cada radical, buscando que uno de los factores esté elevado a una potencia igual al índice del radical:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25(2)} = \sqrt{5^2(x)} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9(2)} = \sqrt{3^2(2)} = 3\sqrt{2}$$

Conclusión

$\sqrt{50}$ y $\sqrt{18}$ **son radicales semejantes**, ya que ambos tienen iguales el índice y el radicando**.**

Operaciones con Radicales

Suma y resta de radicales

Cada radical presente en una expresión algebraica, se debe reducir a su mínima expresión y combinar los radicales que sean semejantes, para después sumarlos y/o restarlos. Para determinar el resultado de $\sqrt{8mn} + 2\sqrt{18mn}$, reduciéndolo a su mínima expresión, se procede de la siguiente manera:

Factorizando los radicandos:

$$= \sqrt{2^2(2mn)} + 2\sqrt{3^2(2mn)}$$

Aplicando la propiedad $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

$= \sqrt{2^2}\sqrt{(2mn)} + 2\sqrt{3^2}\sqrt{(2mn)}$

Convirtiendo los factores a su forma exponencial:

$= (2^2)^{1/2}\sqrt{(2mn)} + 2(3^2)^{1/2}\sqrt{(2mn)}$

$= 2\sqrt{2mn} + 2(3)\sqrt{2mn}$

$= 2\sqrt{2mn} + 6\sqrt{2mn}$

Simplificando:

$$\sqrt{8mn} + 2\sqrt{18mn} = 8\sqrt{2mn}$$

Multiplicación de radicales

En la multiplicación de radicales, se distinguen dos casos: radicales que tengan índices iguales y radicales que tengan índices diferentes.

Radicales con índices iguales

Para determinar el producto de radicales que tengan índices iguales, se aplica la propiedad $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, la cual establece que el producto de dos o más radicales que tengan sus índices iguales, es otro radical con dicho índice cuyo radicando es el producto de los radicandos de los mismos.

Ejemplo: Calcula el producto de $\sqrt{3x}\,\sqrt{5x}$

Aplicando la propiedad $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, se tiene:

$\sqrt{3x}\,\sqrt{5x} = \sqrt{3x(5x)}$

$\sqrt{3x}\,\sqrt{5x} = \sqrt{15x^2} = \sqrt{15}\,x$

$\sqrt{3x}\,\sqrt{5x} = \sqrt{15}\,x$

Radicales con índices diferentes

La multiplicación de dos o más radicales con índice diferente requiere que los mismos sean reducidos a otros equivalentes que tengan unos índices comunes o que sean transformados a su forma exponencial.

Ejemplo: Determina el producto de $\sqrt[3]{\mathbf{b}^2}\,\sqrt[4]{\mathbf{b}^6}$

Primero se calcula el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales, el cual será el índice común a todos ellos:

$\textbf{mínimo común múltiplo} = \mathbf{3(4) = 12}$

$\textbf{índice común} = \mathbf{12}$

Después se calcula la potencia de cada radicando dividiendo el índice común entre el índice del radical que le corresponda:

$\mathbf{b^2 = (b^2)^{12/3} = (b^2)^4 = b^8}$

$\mathbf{b^6 = (b^6)^{12/4} = (b^6)^3 = b^{18}}$

De aquí que, aplicando las propiedades de los radicales:

$\sqrt[3]{\mathbf{b^2}}\,\sqrt[4]{\mathbf{b^6}} = \sqrt[12]{\mathbf{b^8}}\,\sqrt[12]{\mathbf{b^{18}}}$

$\sqrt[3]{\mathbf{b^2}}\,\sqrt[4]{\mathbf{b^6}} = \sqrt[12]{\mathbf{b^{(8+18)}}}$

$\sqrt[3]{\mathbf{b^2}}\,\sqrt[4]{\mathbf{b^6}} = \sqrt[12]{\mathbf{b^{26}}}$

$\sqrt[3]{\mathbf{b^2}}\,\sqrt[4]{\mathbf{b^6}} = \mathbf{b^{26/12}}$ $\quad \left[\mathbf{b^{26/12} = b^{13/6}}\right]$

$$\sqrt[3]{\mathbf{b^2}}\,\sqrt[4]{\mathbf{b^6}} = \sqrt[6]{\mathbf{b^{13}}}$$

División de radicales

En la división de radicales, se distinguen dos casos: radicales que tengan índices iguales y radicales que tengan índices diferentes.

Radicales con índices iguales

Para determinar el cociente de radicales que tengan índices iguales, se aplica la propiedad $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$, la cual establece que el cociente de dos radicales que tengan sus índices iguales, es otro radical con dicho índice cuyo radicando es el cociente de los radicandos de los mismos.

Ejemplo: Determinar el cociente de $\frac{\sqrt[5]{21a^3c^4}}{\sqrt[5]{3ac}}$, reduciéndolo a su mínima expresión.

Aplicando las propiedades de los radicales y de los exponentes, se tiene:

$$\frac{\sqrt[5]{21a^3c^4}}{\sqrt[5]{3ac}} = \sqrt[5]{\frac{21a^3c^4}{3ac}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{21a^3c^4}}{\sqrt[5]{3ac}} = \sqrt[5]{\frac{21ac(a^2c^3)}{3ac}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{21a^3c^4}}{\sqrt[5]{3ac}} = \sqrt[5]{7a^2c^3}$$

Radicales con índices diferentes

La división de dos o más radicales con índice diferente requiere que los mismos sean reducidos a otros equivalentes que tengan un índice común o transformados a su forma exponencial.

Ejemplo: Calcula el cociente de $\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}}$, reduciéndolo a su mínima expresión.

Aplicando las propiedades de los radicales y de los exponentes, se tiene:

$$\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[4]{4^4x^2y^8}}{\sqrt[3]{2^6}} \qquad [256 = 4^4; 64 = 2^6]$$

$$\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{4^{4/4}x^{2/4}y^{8/4}}{2^{6/3}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{4x^{1/2}y^2}{2^2}$$

Simplificando:

$$\frac{\sqrt[4]{256x^2y^8}}{\sqrt[3]{64}} = y^2\sqrt{x}$$

Actividades:

i. Simplifica, usando las propiedades de los exponentes y de las raíces, las siguientes expresiones:

1) $\frac{4^3 \cdot 2^5 \cdot 6}{3^7 \cdot 2^{-2}} =$

2) $\left(\frac{2^{-4} \cdot 5^{-3} \cdot 4}{2^{-6} \cdot 5^{-4} \cdot 125}\right)^3 =$

3) $(5a^2b^3c)(2a^3bx)^3$

4) $(5^{-3})(5^{-4})$=

5) $(2x^2)^3(2x^4)^2$=

6) $\sqrt[5]{(-32)(-243)} =$

7) $\frac{\sqrt[5]{\sqrt[2]{64+\sqrt[2]{36}\cdot\sqrt[2]{16}}}}{(\sqrt[5]{2})^5} =$

ii. Realiza las operaciones:

a) $(\frac{7}{5})^5(\frac{5}{7})^{-4} =$

b) $(\frac{9}{4})^2(\frac{2}{5})^{-1} \div (2 \cdot 3^{-2})^{-2}$=

c) $5\sqrt{27} + 6\sqrt{75}$

d) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{320}$

iii. Ordena de menor a mayor los números: $\sqrt[5]{15}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[15]{3475}$.

2.- Algebra

2.1.- Operaciones algebraicas

Una operación algebraica involucra signos que operan entre dos términos algebraicos.

Ejemplos de terminos algebraicos :

$-3x^2$, $5a^2 b^4$, $\frac{2x^3 b^4}{5}$, $15x^6 y^2 z^4$, $2.4x^2$...

Sumas y restas algebraicas

Las sumas y restas algebraicas se aplican si dos términos son semejantes. Estos se pueden sumar o restar dependiendo su signo. Si las literales no son semejantes no se reduce más la expresión.

Un término es semejante al otro cuando la literal y la potencia a la que está elevada dicha literal son la misma. Observa los siguientes ejemplos de expresiones semejantes y no semejantes.

La Expresión	Es semejante a	La expresión	Si ✓ o No ✗
$7x^5$	Es semejante a	$5x^5$	✓
$-8x^2y$	Es semejante a	$7xy^2$	✗
$10x$	Es semejante a	$3y$	✗
$4a b^3 c^2$	Es semejante a	$\frac{3a\,b^3c^2}{4}$	✓
$-8x^3y^3$	Es semejante a	$-8xy$	✗

Ejemplos de suma y resta de polinomios:

Una forma de resolver una suma o resta de una operación algebraica es sumas y restas, es Agrupando los términos semejantes para después sumarlos o restarlos:

$10a - 7b + 5c - 4a + 8b - 6c = (10a - 4a) + (-7b + 8b) + (5c - 6c) = 6a + b - c$

Se seguirá respetando las reglas de las sumas y restas, donde signos diferentes operan una resta y signos iguales una suma, siempre respetando el signo del número mayor. La literal se conserva igual.

En ciertas ocasiones se presentan las operaciones con paréntesis para agrupar una operación, si se tiene delante de un paréntesis un signo de suma no cambia ningún signo que este dentro del paréntesis, pero si cambian los signos de los números dentro de la operación si se tiene un signo de menos por delante esto pasa por el hecho de que se está dictando que es el inverso de sumatorio de cada uno de los números. Observa el siguiente ejemplo:

$-(\mathbf{7a^2} - \mathbf{3ab} + \mathbf{b^2} + \mathbf{3}\boldsymbol{c}^\mathbf{3}) + (-\mathbf{5ab} + \mathbf{a^2} - \mathbf{b^2}) - (\mathbf{8ab} - \mathbf{b^2} - \mathbf{2a^2})=$

Al retirar los paréntesis a través de sus inversos operacionales:

$-7a^2 +3ab - b^2 -5ab +a^2- b^2 -8ab + b^2 +2a^2$

Agrupamos términos semejantes y resolvemos:

$-7a^2$	$+ 3ab$	$-b^2$	$+ 3c^3$
a^2	$-5ab$	$-b^2$	
$+2a^2$	$-8ab$	$+b^2$	
$5a^2$	$-10ab$	$- b^2$	$+ 3c^2$

Actividad. Resuelve los siguientes ejercicios:

1) $(3/4 - 5b) + (1/5a + 10\ ) - [(2.5b - 10) + (7.5a + 9)]=$
2) $(2x^n + 3y^m + 2x^{n-1}) - (x^n + 2y^m - 5x^{n-1} + 3y^{m+1}) =$
3) $1/2x + 3x^2y - 7xy + 2x + xy^2 + 2y - 3\ x^2y + 1.5x - 15\ xy^2 =$
4) Qué expresión debe restarse de $x^3 - 4x^2 + 8$ para obtener $x - 5$?
5) Si un atleta corre hoy (3a – 20) Km y ayer recorrió (5a – 30) Km, ¿cuántos Km habrá recorrido en los 2 días?

Multiplicación algebraica

La multiplicación algebraica es similar a la multiplicación en la aritmética solo que para el álgebra cada dígito de un número es un término.

25	15
x 3	x 32
75	30
	45
	480

Se sabe que para obtener el resultado de 75, el 3 debe de multiplicar a los dos dígitos del 25, en la otra multiplicación aplica lo mismo los cada dígito del 32 debe de multiplicarse con cada dígito del 15 y después los resultados se suman llevando un orden, en el álgebra es muy similar, se multiplica cada uno de los términos y **se suman los exponentes de las literales comunes** así como las expresiones semejantes**.**

Analiza los siguientes ejemplos:

$3x(5y+4x-6x^3) = 15xy + 12x^2 - 18x^4$

$(5x-6x^2)\ (8x^2-6y-2x^2) = 40x^3-30xy-10x^3-48x^4+36x^2y+12x^4$

Se observa que cada termino se multiplica por cada uno de los otros y se suman los exponentes de las literales que son semejantes. Para finalizar en el segundo ejemplo, se debe de simplificar la expresión:

$$40x^3-30xy-10x^3-48x^4+36x^2y+12x^4 = 30x^3 - 30xy - 36x^4 + 36x^2y$$

Ordenando

$$-15x^4 +6x^3 + 25x^2y - 10xy$$

Actividades.

Realiza los siguientes productos:

1) $(5xyz)\ (2x^2 - 7y - 5x^2) =$
2) $3x^{2m}(x^{m+1} + 3x^m - x^{m-1})$
3) $(a^m - 3)(a^{m-1} + 2)(a^{m-1} - 1)=$
4) $(3/4z - 4.5x)\ (1/7z + 5.7x) =$
5) $3x(x +5)(x + 8)=$

División algebraica

La división algebraica se realiza de manera muy similar a la división cotidiana, solo recuerda restar los exponentes de las literales semejantes**.**

Monomio entre monomio

Ejemplos:

1. $(15x^5y^7z) \div (5x^2y^4z)$

Pasamos a fracción para mejor comprensión:

$\frac{(10x^5y^7z)}{(5x^2y^9z)} = 2x^3y^{-2} = \frac{2x^3}{y^2}$

En la operación anterior se dividieron los números enteros, después se restaron los exponentes de las literales y se ordenó la potencia negativa pasando esta hacia el denominador para hacer positivo el exponente de la literal.

Simplifica la siguiente fracción o división:

2. $\frac{27x^4y^7}{12xy^{-5}} = \frac{9x^3y^{7-(-5)}}{4} = \frac{9x^3y^{7+5}}{4} = \frac{9x^3y^{12}}{4}$

Las expresiones algebraicas siempre se reducen a su mínima expresión, siguiendo cada una de la regla de los exponentes.

Polinomio entre monomio

Ejemplo:

$$\frac{7y^3x^3z^7 + 14yx^5z^4 - 49y^4x^5z^8}{-7y^4x^2z^8} = -y^{-1}xz^{-1} - 2x^3z^{-4} + 7x^3 = -\frac{x}{yz} - \frac{2x^3}{z^4} + 7x^3$$

Para el ejercicio anterior el denominador dividió a cada uno de las expresiones del polinomio en el numerador y se respetaron las reglas de los exponentes.

Ejercicio con operaciones múltiples.

$$\left[\frac{(6wx^4)(3w^3x)}{(3w^2x^5)(wx)}\right]^3$$

Resolución

Siguiendo las reglas algebraicas, se puede iniciar realizando las multiplicaciones que están dentro de los corchetes:

$$\left[\frac{18w^4x^5}{3w^3x^6}\right]^3$$

Se continúa con la división:

$$[6w^{-1}x^1]^3$$

Para finalizar, se eleva la expresión al exponente y se ordenan los valores:

$$216w^{-3}x^3 = \frac{216x^3}{w^3}$$

Realiza las siguientes actividades:

8. $(63x^3y^3z^4) \div (-7x^2y^3z^4) =$

9. $\frac{27xy^{-3}}{18x^2y^5} =$

10. 2x+{-5x-[-2y(-x+y)]} =

11. $\frac{28x^3y^2z + 63x^5y^5z^6 - 42xy^7z^3}{7xy^2z} =$

División de dos polinomios

Observa con atención cada paso que se realiza para llegar al resultado y compáralo con la división en la aritmética:

Ejemplo 1:

$-24x + 20x^4 - 6 + 5x^3$ entre **$1 + 4x$**

- **Paso 1:** se ordenan los polinomios

  Dividendo: $20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6$

  Divisor: $4x + 1$

- **Paso 2:** se colocan como una división aritmética

  $4x + 1 \overline{\smash{)}\, 20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6}$

- **Paso 3:** El primer término del cociente es $5x^3$, porque $4x(5x^3) = 24x^4$

  $$\begin{array}{r|l} & 5x^3 \\ \hline 4x + 1 & 20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6 \end{array}$$

- **Paso 4:** se multiplica **$6x^3$** por cada uno de los términos del divisor

  $5x^3(4x + 1) = 20x^4 + 5x^3$

  y se restan los términos semejantes en el dividendo:

  $$\begin{array}{r|l} & 5x^3 \\ \hline 4x + 1 & 20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6 \\ & -20x^4 - 5x^3 \end{array}$$

- **Paso 5:** al restar algebraicamente los términos semejantes y bajar los términos restantes del dividendo inicial, se obtiene un segundo dividendo:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 \\
\hline
4x+1 & 20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6 \\
 & -20x^4 - 5x^3 \\
\hline
 & 0 \quad 0 + \quad 0x^2 - 24x - 6
\end{array}
$$

- **Paso 6:** se deben repetir los pasos **3** y **4** hasta que el residuo sea igual a cero o menor que la potencia del divisor:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^3 \qquad\qquad -6 \\
\hline
4x+1 & 20x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 24x - 6 \\
 & -20x^4 - 5x^3 \\
\hline
 & 0 \quad 0 + \quad 0x \; - \; 24x - 6 \\
 & \qquad\qquad\qquad +24x + 6 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto:

$$\frac{20x^4+5x^3-24x-6}{4x+1} = 5x^3 - 6$$

Ejemplo 2:

Determina el cociente de $\mathbf{m^4 - 11m^2 + 34}$ entre $\mathbf{m^2 - 3}$

Resolución

Ubicando el dividendo y el divisor tal como en una división aritmética y efectuando las operaciones:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \mathbf{m^2 - 8} \\
\hline
\mathbf{m^2 - 3} & \mathbf{m^4 - 11m^2 + 34} \\
 & \mathbf{-m^4 + 3m^2} \\
\hline
 & \qquad \mathbf{-8m^2 + 34} \\
 & \qquad\;\; \mathbf{8m^2 - 24} \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad \mathbf{10}
\end{array}
$$

De aquí que:

$$\frac{m^4-11m^2+34}{m^2-3} = m^2 - 8 + \frac{10}{m^2-3}$$

2.2 - Productos y cocientes notables.

Este es el nombre que reciben las multiplicaciones y divisiones que incluyen expresiones algebraicas cuyo resultado se puede escribir mediante una simple inspección, es decir, sin verificar, pues cumplen ciertas reglas fijas. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones y divisiones habituales.

Binomio al cuadrado o cuadrado de un binomio

Para elevar un binomio al cuadrado (es decir, multiplicarlo por sí mismo) se suman los cuadrados de cada término por el doble del producto de ellos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Al realizar la operación cuando un valor se eleva al cuadrado se obtiene que: (a + b) (a + b) = $a^2 + ab + ab + a^2$ sumando semejantes obtenemos un trinomio tiene como resultado: $a^2 + 2ab + b^2$.

Ejemplo:

$(\mathbf{6a} + \mathbf{b})^2$

"El cuadrado del primer término es" más:

$$(\mathbf{6a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{36a^2} \ldots$$

"El doble producto del primer término por el segundo":

$(\mathbf{6a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{36a^2} + \mathbf{12ab} \ldots$

y "el cuadrado del segundo término es **b** cuadrada", por lo tanto:

$(\mathbf{6a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{36a^2} + \mathbf{12ab} + \mathbf{b^2}$

Siguiendo los pasos y respetando los signos de la formula y el ejercicio se puede realizar cualquier ejercicio, $a^2 + 2ab + b^2$ Ejemplo:

$$(-11 + 13y^2)^2 = (-11)^2 + 2(-11)(13y^2) + (13y^2)^2 = 121 - 286y^2 + 169y^4$$

$$169y^4 - 286y^2 + 121$$

Como se observa el tercer signo siempre será positivo

Producto de dos binomios con un término común

El producto de dos binomios que tienen un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto del término común por la suma algebraica de los otros dos términos, más el producto de los otros dos términos. En notación algebraica es: **(x + a) (x + b) = x²+ x (a + b) + ab**

Ejemplo:

$(\mathbf{3m^2} + \mathbf{3n})(-\mathbf{n} + \mathbf{3m^2})$ el termino común es $3m^2$ por lo que siguiendo la regla:

$$(3m^2)^2 + 3m^2(+3n - n) + (3n)(-n) = \ 9m^4 + 6nm^2 - 3n^2$$

Producto de dos binomios conjugados

El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término. En notación algebraica es

$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a^2} - \mathbf{b^2}$

Ejemplo:

Aplicándola en $(\mathbf{6x^2} + \mathbf{m^2x})(\mathbf{6x^2} - \mathbf{m^2x})$:

El cuadrado del primer término es:

$(\mathbf{6x^2})^2 = \mathbf{36x^4}$

El cuadrado del segundo término es:

$(\mathbf{m^2x})^2 = \mathbf{m^4x^2}$

El resultado es:

$(\mathbf{6x^2} + \mathbf{m^2x})(\mathbf{6x^2} - \mathbf{m^2x}) = \mathbf{36x^4} - \mathbf{m^4x^2}$

Debes procurar desarrollar la habilidad para que las operaciones se realicen ejecutando mentalmente lo señalado por la regla y anotarlas directamente en la respuesta:

$(\mathbf{6x^2} + \mathbf{m^2x})(\mathbf{6x^2} - \mathbf{m^2x}) = \mathbf{36x^4} - \mathbf{m^4x^2}$

2. Obtén el producto $(\mathbf{2x} + \mathbf{y} + \mathbf{8})(\mathbf{y} + \mathbf{2x} - \mathbf{8})$

Resolución

En los casos en que es necesario multiplicar dos trinomios que constan de los mismos términos, pero con alguna variante en sus signos, se puede aplicar la regla del binomio al cuadrado utilizando las propiedades conmutativa y asociativa para disponerlos en forma de binomios conjugados.

Reordenando los trinomios en forma de binomios conjugados, asociando a $\mathbf{2x + y}$ para agruparlos representando una sola cantidad:

$(\mathbf{2x + y + 8})(\mathbf{y + 2x - 8}) = [(\mathbf{2x + y}) + \mathbf{8}][(\mathbf{2x + y}) - \mathbf{8}]$

Aplicando la regla del producto de dos binomios conjugados:

- Cuadrado del primer término: $(\mathbf{2x + y})^{\mathbf{2}}$

Usando la regla para desarrollar un binomio al cuadrado:

Cuadrado del primer término: $(\mathbf{2x + y})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4x^2 + 4xy + y^2}$

- Menos el cuadrado del segundo término: $-(\mathbf{8})^{\mathbf{2}} = -\mathbf{64}$

Por lo tanto:

$(\mathbf{2x + y + 8})(\mathbf{y + 2x - 8}) = \mathbf{4x^2 + 4xy + y^2 - 64}$

Binomio al cubo

Ejemplo:

$(\mathbf{3x - 7y})^{\mathbf{3}}$.

Resolución

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término, considerando que cada término se toma con su propio signo. $(\mathbf{a \pm b})^{\mathbf{3}} = (\mathbf{a})^{\mathbf{3}} \pm \mathbf{3}(\boldsymbol{a})^{\mathbf{2}}\mathbf{b} + \mathbf{3a}(\mathbf{b})^{\mathbf{2}} \pm (\mathbf{b})^{\mathbf{3}}$

Así, el desarrollo de $(\mathbf{3x - 7y})^{\mathbf{3}}$ es:

- El cubo del primer término es $(\mathbf{3x})^{\mathbf{3}} = \mathbf{27x^3}$

- El triple producto del cuadrado del primer término por el segundo es $\mathbf{3(3x)^2(-7y) = -189x^2y}$

- El triple producto del primer término por el cuadrado del segundo es $\mathbf{3(3x)(-7y)^2 = 441xy^2}$

- El cubo del segundo término es $\mathbf{(-7y)^3 = -343y^3}$

Por lo tanto:

$$\mathbf{(3x-7y)^3 = 27x^3 - 189x^2y + 441xy^2 - 343y^3}$$

De manera directa con la regla:

$$\mathbf{(3x-7y)^3 = (3x \pm 7y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^{2(}7y) + 3(3x)(-7y)^2 + (-7y)^3}$$

$$\mathbf{27x^3 - 189x^2y + 441xy^2 - 343y^3}$$

2. $\mathbf{\left(-\frac{1}{5}x - \frac{5}{3}y\right)^3}$

$$\mathbf{\left(-\frac{1}{5}x - \frac{5}{3}y\right)^3 = (-\frac{1}{5}x)^3 + (-\frac{1}{5}x)^2\left(-\frac{5}{3}y\right) + (-\frac{1}{5}x)(-\frac{5}{3}y)^2 + \left(-\frac{5}{3}y\right)^3 =}$$

$$\mathbf{-\frac{1}{125}x^3 - \frac{5}{75}x^2y - \frac{25}{45}xy^2 - \frac{125}{27}y^3 = -\frac{x^3}{125} - \frac{x^2y}{15} - \frac{5xy^2}{9} - \frac{125y^3}{27}}$$

Actividades:

1.- $(senx + cosx)^2$

2.- $(a - b + c - d)^2$

3.- $(x^2 + \frac{1}{4}y)(x^2 - \frac{1}{4}y)$

4.- $(-3\sqrt{7x} + 2\sqrt{y})(-3\sqrt{7x} - 2\sqrt{y})$

5.- $(2a^2b - a^3c)^3$

6.- $(a^x + b^y)^3$

7.- $(a^3 + 5)(a^3 - 3)$

8.- $(y + \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})$

Cocientes notables
Se les llama cocientes notables a aquellas divisiones exactas, es decir, de residuo cero que se puede obtener de forma directa sin resolver o realizar ningún tipo de división algebraica.

Generalmente los cocientes notables toman la siguiente forma:

- Exponentes iguales en dividiendo
- Las Bases del divisor son el resultado de las raíces con índice n de cada termino en dividiendo

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$$

Casos de cocientes notables

Caso1: $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ es un cociente notable

Caso 2: $\frac{x^n + a^n}{x + a}$ es un cociente notable si y solo si n es impar.

Caso 3: $\frac{x^n - a^n}{x + a}$ es un cociente notable si y solo si n es par.

Caso 4: $\frac{x^n + a^n}{x - a}$ esta división no es cociente notable

Desarrollo de un cociente notables

Tiene la siguiente expresión de polinomio y se desarrolla en este orden

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a} = \pm x^{n-1} \pm x^{n-2}a^1 \pm x^{n-3}a^2 \pm x^{n-4}a^3 \pm a^{n-1}$$

- ✓ El número de términos del cociente de la igualdad del polinomio es igual al exponente n.
- ✓ El exponente de base x disminuye de 1 en 1.
- ✓ El exponente de base a aumenta de 1 en 1 a partir del segundo término.

Caso 1: cociente notable

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de las mismas es igual a la suma de las cantidades.

Ejemplo:

$\frac{25x^2-49y^2z^4}{5x-7yz^2}$ = a+b = $5x + 7yz^4$

En el anterior ejemplo el numerador es una diferencia de términos que tienen potencias pares y cada término de la suma del denominador aparece en el numerador elevado al cuadrado puesto que:

$(5x)^2 = 25x^2$ $\quad (-7yz^2)^2$=$49y^2z^4$ por lo tanto se obtiene se puede aplicar la regla.

Caso 2: Estos casos solo son aplicables para valores donde n es impar, por tanto, la siguiente división es un cociente notable:

$$\frac{x^7 + a^7}{x + a} = x^6 - x^5a + x^4a^2 - x^3a^3 + x^2a^4 - xa^5 + b^6$$

Ejemplo: $\frac{5(a+25b)}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}} = \frac{5a+125b}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}} = (\sqrt[3]{5a})^2 - (\sqrt[3]{5a})(5\sqrt[3]{b}) + (5\sqrt[3]{5b})^2$

En el anterior ejercicio se cumple la condición como $(\sqrt[3]{5a})^3$ es 5ª y $(5\sqrt[3]{5a})^3$ es 125b entonces se puede aplicar la operación como división notable.

Caso 3: Este caso solo es aplicable para cuando n es par

Ejemplo: $\frac{a^2b^2-a^6}{ab+a^3} =$

Se cumple la condición del cociente notable por que las partes del nominador coinciden con las raíces del numerador: $(ab)^2 = a^2b^2\ y\ (a^3)^2 = a^6$ entonces:

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de ellas es igual a la diferencia de las cantidades

$$\frac{a^2b^2 - a^6}{ab + a^3} = ab - a^3$$

Caso 4: Simplemente aplicamos el teorema del resto para identificar si la división es un cociente notable o no.

Ejemplo: $\frac{x^8+a^8}{x-a}$ si se iguala el denominador a cero se obtiene que $x-a=0$ $x=a$ remplazando en el numerador $a^8+a^8=2a^8$ el resultado es diferente de cero por lo tanto no es un cociente de caso 1.

Actividades:

1.- $\frac{x^3-8x^6}{x-2x^2}=$

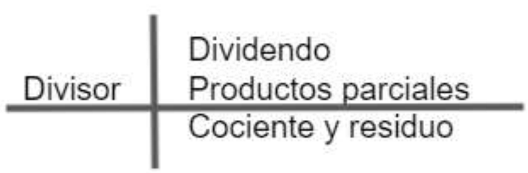
2.- $\frac{y^3+1}{y+1}=$

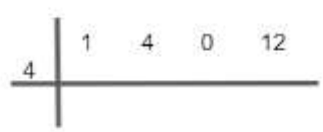
3.- $\frac{z^4-a}{z+a}=$

2.3.- Teorema del residuo, división sintética.

División sintética

La división sintética es un método para dividir el polinomio $P(x)$ por el polinomio $x-r$, donde r es un número real. La división sintética se basa en el siguiente arreglo.



Procedimiento	**Ejemplo** $(x^3+4x^2+12)\div(x-4)$ Notemos que $x^3+4x^2+12=x^3+4x^2+0x+12$
1. En el dividendo colocamos los coeficientes del polinomio, el cual debe estar ordenado de forma decreciente. En el divisor, cuya forma es $x-r$, anotamos r.	

<table>
<tr><td>2. El primer elemento de la fila del cociente es el primer coeficiente del dividendo.</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 0 & 12 \\ 4 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>3. Multiplicamos este cociente por el divisor y anotamos el producto debajo del segundo coeficiente del dividendo.</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 0 & 12 \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>4. Sumamos la columna.</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 0 & 12 \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & 8 & & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>5. Multiplicamos el resultado por el divisor y anotamos el resultado para el tercer coeficiente del polinomio.</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 0 & 12 \\ 4 & & 4 & 32 & \\ \hline & 1 & 8 & & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>6. Sumamos la columna.</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 0 & 12 \\ 4 & & 4 & 32 & \\ \hline & 1 & 8 & 32 & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>7. Repetir los pasos 5 y 6 hasta obtener la suma de la última columna.</td><td>$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 0 & 12 \\ 4 & & 4 & 32 & 128 \\ \hline & 1 & 8 & 32 & \end{array}$$
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 0 & 12 \\ 4 & & 4 & 32 & 128 \\ \hline & 1 & 8 & 32 & 140 \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>El último número del cociente es el residuo de la división. Mientras que el resto de los números son los coeficientes del polinomio resultante de la división, donde el primer elemento es el coeficiente del término con mayor grado de este polinomio, el cual debe ser un grado menor que el grado del dividendo.</td><td>El resultado nos indica que
$$\begin{array}{r l} & x^2+8x+32 \\ x-4 & \overline{)\,x^3+4x^2+12} \\ & \qquad\quad 140 \end{array}$$</td></tr>
</table>

Actividades

Resuelve las siguientes divisiones usando el método de la división sintética.

i. $(x^2 - 3x - 18) \div (x - 6)$

ii. $(6x^2 + 2x - 8) \div (x + 2)$

iii. $(2x^6 + 5x^4 - x^2) \div (x - 1)$

Teorema del Residuo

Si un polinomio $P(x)$ se divide por $x - r$, donde r es un número real, el residuo es $P(r)$.

Ejemplos:

1. Sea $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$. Determinar el residuo cuando $P(x)$ se divide por $x - 3$.
   Primero evaluamos el polinomio en $x = 3$.
   $P(3) = 2(3^3) - 3(3^2) - 2(3) + 1 = 2(27) - 3(9) - 2(3) + 1 = 54 - 27 - 6 + 1 = 22$.
   Por el Teorema del Residuo, $\frac{P(x)}{x-3}$ tiene como residuo 22.

2. Sea $P(x) = x^3 + kx^2 + x + 5$ donde k es un entero desconocido. Si $P(x)$ dividido por $x - 2$ tiene residuo 3 ¿Cuál es el valor de k?
   Evaluamos el polinomio en $x = 2$.
   $P(2) = 2^3 + k(2^2) + 2 + 5 = 8 + 4k - 2(3) + 2 + 5 = 15 + k$.
   Por otro lado, usando el Teorema del Residuo, obtenemos $P(2) = 3$. Así que $15 + 4k = 3$, resolvemos la ecuación, el resultado es $k = -3$.

Actividades

1. Usa el Teorema del Residuo para encontrar el residuo de las siguientes divisiones.
   a. $\frac{x^3+2x^2-3x+1}{x+1}$
   b. $\frac{2x^4-x^3-3x^2+4x-1}{x-2}$
2. Para k un número real, si $\frac{kx^3-5x^2+7}{x-3}$ tiene residuo 43 ¿Cuál es el valor de k?

Fracciones algebraicas

Suma o resta de fracciones algebraicas

Ejemplos:

1.- Determina el resultado de $\frac{2h+1}{4}-\frac{h-3}{6}$, simplificándolo a su mínima expresión

Resolución

Al ser dos fracciones se puede realizar la regla de los cruzados que es multiplicar de la siguiente forma:

$$\frac{2h+1}{4}-\frac{h-3}{6}=\frac{6(2h+1)-(4(h-3))}{24}=\frac{12h+6-(4h-12)}{24}=\frac{12h+6-4h+12}{24}$$

$$\frac{12h+6-4h+12}{24}=\frac{8h+18}{24}=\frac{4h+9}{12}$$

2.- Reduce $\frac{x+3}{x+1}+\frac{x-2}{(x+1)^2}$ a su mínima expresión.

Resolución

Ubicando **$(x + 1)^2$** como denominador común y multiplicando las **2** fracciones por **$(x + 1)^2$**, se tiene:

$$=\frac{(x+1)(x+3)+x-2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+4x+3+x-2}{(x^2+2x+1)}=\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+1}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

Ejemplos:

1.- Calcula la multiplicación de $\left(\frac{-6x^3y}{x^2-6x+8}\right)\left(\frac{x^2-5x+4}{-3x^3}\right)$ y reduce el resultado a su mínima expresión.

Resolución

Factorizando los trinomios:

$$x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$$

$$x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$$

$=\frac{6x^3y(x-4)(x-1)}{3x^3(x-4)(x-2)}$ cuando las expresiones del numerador y denominador están multiplicando y algunos de ellos son iguales se puede aplicar que al tener la misma expresión en una fracción se obtiene 1 ($\frac{5}{5}=1, \frac{(x-1)}{(x-1)}=1$).

Por lo tanto $\frac{6x^3y(x-4)(x-1)}{3x^3(x-4)(x-2)}=\frac{6x^3y(1)(x-1)}{3x^3(x-2)}=\frac{2y(x-1)}{x-2}=\frac{2yx-2y}{x-2}$

División de fracciones algebraicas

Ejemplos:

1.- Efectúa la división de $\frac{m^6}{3x^2}$ entre $\frac{6m^4}{9x}$ y simplifica el resultado.

Resolución

$$\frac{\frac{m^6}{3x^2}}{\frac{6m^4}{9x}}=\frac{m^6}{3x^2}\left(\frac{9x}{6m^4}\right)$$

$$\frac{\frac{m^6}{3x^2}}{\frac{6m^4}{9x}}=\frac{9m^6x}{18m^4x^2}=\frac{m^2}{2x}$$

2.4.- Descomposición factorial.

Divisor común

Este método de factorización consiste en buscar un coeficiente y una literal que divida a todos los términos. El término será el factor común y se formará por el máximo común divisor de los coeficientes del polinomio y la literal o literales, elevadas al menor exponente con el que aparezcan en alguno de los términos.

Ejemplo:

1.- Factoriza la expresión $112m^5n-176m^8n^2-144m^6$

Se puede observar que el 16 divide al 144 entonces se puede probar si es divisor de los demás u obtener el MCD

112	176	144	2
56	88	72	2
28	44	36	2
14	22	18	2
7	11	9	

El factor común numérico es el producto de estos números

Coeficientes de los términos del segundo factor

Por lo tanto, al factorizar $112\mathrm{m}^5\mathrm{n} - 176\mathrm{m}^8\mathrm{n}^2 - 144\mathrm{m}^6$ se obtiene $16\mathrm{m}^5(7\mathrm{n} - 11\mathrm{m}^3\mathrm{n}^2 - 9m)$

Si no tuviera un divisor común puede darse el siguiente caso:

2.- $7n^4 - 9n^6 = n^4(7-9n^2)$
Si la literal no fuera común puede darse:
3.- $49n^3 - 28m^2 = 7(7n^2-4m)$

En algunos ejercicios la expresión se entiende mejor al acomodar las multiplicaciones para factorizar:

4.- 8(x-1)-71y(x-1) =

x-1 se repite en las dos partes del binomio entonces (x-1)(8-71y)

4.- $(2a+3)(a+7)^2 - 4(a+7)^3$

El valor que se repite con el exponente menor es $(a+7)^2$ por lo que

$$(2a+3)(a+7)^2 - 4(a+7)^3 = (a+7)^2[(2a+3) - 4(a+7)]$$

Factor por agrupación
Generalmente se trata de polinomios de cuatro o más términos, que no tienen un divisor común pero sí un divisor parcial. El procedimiento consiste en obtener el divisor común parcial de cada grupo de términos que lo comparten y posteriormente determinar el factor común de los términos restantes.

ac+bc+ ad +bd = c (a +b)+d (a +b)= (a + b)(c + d)

Ejemplos:

1.) 2ax + 3ay −8bx −12by

Primero debes identificar los términos que tienen divisor común. Se tomarán a las literales *x* e *y* para agruparlos, 2ax −8bx + 3ay −12by

El divisor parcial de los dos primeros es y el de los dos últimos es, por lo tanto, el factor común de cada par es 2x(a − 4b) +3y (a − 4b)

Aplicando la regla del factor común el resultado es: (a − 4b) (2x+3y)

2.) $x^3+8y^3+2x^2y+4xy^2$
Esta expresión se puede factorizar ordenándola conforme a la literal x
$x^3+2x^2y+4xy^2+\ 8y^3$ y después aplicar la regla se factor común en las dos partes del polinomio $(x^3+2x^2y)+(4xy^2+\ 8y^3)=x^2(x+2y)+4y^2(x+2y)$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto
Un trinomio cuadrado perfecto es aquel que se obtiene al elevar un binomio al cuadrado. Esto es:

$$(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\pm\mathbf{2ab}+\mathbf{b}^2$$

Para saber si un trinomio cuadrático de la forma general $\mathbf{ax^2}+\mathbf{mx}+\mathbf{c}$ es perfecto, se debe verificar que **mx** sea igual al doble producto de la raíz cuadrada de **ax²** por la raíz cuadrada de **c**, o sea:

$$\mathbf{mx}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{ax^2}}\,\sqrt{\mathbf{c}}$$

La factorización de un trinomio cuadrado perfecto es un binomio elevado al cuadrado en el cual su primer término es la raíz cuadrada del primer término del trinomio y su segundo término es la raíz cuadrada del tercer término del trinomio, con el signo que tenga el segundo miembro del trinomio.

Ejemplos

1.- Factoriza el trinomio $\mathbf{16x^2}-\mathbf{24xy}+\mathbf{9y^2}$

Resolución

Comparando el trinomio con la forma general $\mathbf{ax^2}+\mathbf{mx}+\mathbf{c}$, se puede observar que **a = 16**, **m = 24y** y **c = 9y²**. Para saber si el trinomio dado es cuadrado perfecto, se debe cumplir que $\mathbf{mx}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{ax^2}}\,\sqrt{\mathbf{c}}$, esto es:

$$\mathbf{24xy}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{16x^2}}\sqrt{\mathbf{9y^2}}$$

$$\mathbf{24xy}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{16}}\,\sqrt{\mathbf{x^2}}\,\sqrt{\mathbf{9}}\,\sqrt{\mathbf{y^2}}$$

$$\mathbf{24xy}=\mathbf{2}(\mathbf{4})(\mathbf{x})(\mathbf{3})(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{24xy}=\mathbf{24xy}$$

Por lo tanto, $\mathbf{16x^2 - 24xy + 9y^2}$ es un trinomio cuadrado perfecto.

La factorización paso a paso del mismo es:

- La raíz cuadrada del primer término es $\sqrt{\mathbf{16x^2}} = \mathbf{4x}$
- La raíz cuadrada del tercer término es $\sqrt{\mathbf{9y^2}} = \mathbf{3y}$
- El signo del segundo miembro del trinomio es negativo

Con base a lo anterior:

$\mathbf{16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x - 3y)^2}$

2.- $\mathbf{1 - 10a^5 + 25a^{10}}$

Resolución

Comprobando este trinomio $\sqrt{1}$ y $\sqrt{25a^{10}}$ se tiene 1 y 5($a^{10/2} = a^5$) si estos términos se multiplican y se da el doble se debe obtener el valor de en medio (mx)= $2(1)(5a^5) = 10a^5$ por lo tanto si es un trinomio cuadrado perfecto

$$1 - 10a^5 + 25a^{10} = (1 - 5a^5)^2$$

3.-$\mathbf{(x + 2y)^2 + 9z^2 + 6xz + 12yz}$

Resolución

Si observas el siguiente no es un trinomio, pero se pueden ubicar los valores que tienen raíz cuadrada exacta que son:

$$\sqrt{(x+2y)^2} = x + 2y \qquad \sqrt{9z^2} = 3z$$

Comprando mediante la regla anterior

$$2(x + 2y)(3z) = 3z(2x + 4y) = 6zx + 12zy$$

Por lo tanto, si aplica para la regla del trinomio cuadrado perfecto

$$(x + 2y)^2 + 9z^2 + 6xz + 12yz = [(x + 2y) + 3z]^2$$

Factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

La factorización de trinomios de la forma $\mathbf{x^2 + bx + c}$ es el producto de dos binomios $(\mathbf{x \pm d})(\mathbf{x \pm e})$, tales que $\mathbf{b}$ sea igual a la suma algebraica de $\mathbf{d}$ y $\mathbf{e}$, y

$\mathbf{c}$ sea igual al producto $(\mathbf{d})(\mathbf{e})$, aplicando la regla de los signos. En forma algebraica:

$$\mathbf{x^2 + bx + c = (x \pm d)(x \pm e)}$$

en la cual:

$$\mathbf{b = (\pm d \pm e)}$$

$$\mathbf{c = \pm d(\pm e)}$$

Ejemplo:

Factoriza la expresión $\mathbf{x^2 - 10x + 24}$

Resolución

Paso 1

Extraer la raíz cuadrada de **x^2**, este paso siempre se repite

$$\sqrt{\mathbf{x^2}} = \mathbf{x}$$

Paso 2

Ubicar **x** como primer término de los dos factores

$$\mathbf{x^2 - 8x + 12 = (x \quad)(x \quad)}$$

Paso 3

Buscar dos números que multiplicados den **24** y sumados o restados den **-10.** Para encontrarlos, se obtienen los factores de **24** por parejas:

$$\mathbf{24 = (1)(24) = (8)(3) = (12)(2) = (6)(4)}$$

Inspeccionando las parejas de factores, podemos observar que $(\mathbf{12})(\mathbf{2})$ satisfacen la primera condición; la segunda condición se cumple dándole los signos que la satisfagan, esto es: $(-\mathbf{12})(+\mathbf{2})$

Paso 4

Ubicar los números determinados con su signo correspondiente en los segundos términos de los binomios:

$\mathbf{x^2 - 10x + 24 = (x - 12\ )(x + 2)}$

Los trinomios de la forma $\mathbf{x^2 + bx + c}$ en los cuales no se cumplan las dos condiciones señaladas, no son factorizables mediante esta regla

Factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Se explicará mediante pasos la factorización de este tipo

Ejemplo:

Factoriza la expresión $\mathbf{2x^2 + 3x - 2}$

Resolución

Paso 1

Se indica la multiplicación de todo el trinomio dado por **a (a = 2)**:

$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = 2(2x^2 + 3x - 2)}$

Paso 2

Se efectúa la multiplicación para el primero y tercer término del binomio, y sólo se indica la multiplicación para el término en **x**:

$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = 4x^2 + 2(3x) - 4}$

Paso 3

Se busca que el primer término se exprese sin coeficientes y que el coeficiente del segundo sea el del trinomio original:

$$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = (2x)^2 + 3(2x) - 4}$$

Paso 4

Se ubica **2x** como primer término en los dos binomios factores y se hallan dos números que multiplicados den **– 4** y sumados algebraicamente den **3**, los cuales son **4** y **–1**; cada uno de los números encontrados será el segundo miembro de cada binomio:

$$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = (2x + 4)(2x - 1)}$$

Paso 5

Se divide entre **2** para no alterar el trinomio original, ya que al principio se multiplicó por **2**:

$$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = \frac{(2x+4)(2x-1)}{2}}$$

Paso 6

Se simplifica para obtener el resultado:

$$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1)}$$

Factorización de una diferencia de cuadrados

La descomposición en factores de una diferencia de cuadrados de la forma $\mathbf{a^2 - b^2}$ es el producto de dos binomios que sólo difieren por el signo del segundo término (conocidos como binomios conjugados), esto es:

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

El primer factor binomio está compuesto por la diferencia entre la raíz cuadrada de la primera cantidad y la raíz cuadrada de la segunda, y el segundo factor binomio es el conjugado del primero.

Ejemplos:

1.- Factoriza la expresión $\mathbf{144s^2 - 169t^2}$

Resolución

Aplicando la regla de la diferencia de cuadrados:

- $\sqrt{\mathbf{144s^2}} = \mathbf{12s}$
- $\sqrt{\mathbf{169t^2}} = \mathbf{13t}$
- El primer factor binomio es $(\mathbf{12s - 13t})$
- El segundo factor binomio es el conjugado del primero: $(\mathbf{12s + 13t})$

La factorización es:

$\mathbf{144s^2 - 169t^2 = (12s - 13t)(12s + 13t)}$

Si gusta asegurar puede verificar rápidamente realizando las multiplicaciones algebraicas mentalmente es decir multiplicando extremos del polinomio y verificando que al multiplicar se elimine el valor de en medio del trinomio.

$(12s)^2$ y $(13t)^2$ = $\mathbf{144s^2 - 169t^2}$

Se verifica que el valor de en medio se elimine

(-12s) (13t) y (-13s) (12t)

Mismas multiplicaciones con signos opuestos entonces si es 0 el valor de en medio del trinomio.

2.- Factoriza la expresión $\mathbf{z^2 + y^2 + 2zy - 25}$

Resolución

Reordenando los términos del polinomio dado:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 - 25}$

Inspeccionando los tres primeros términos, se puede observar que **2zy** es el doble producto de las raíces cuadradas de $\mathbf{z^2}$ y de $\mathbf{y^2}$, lo que indica que dicho trinomio es cuadrado perfecto, esto es:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 = (z + y)^2}$

Ya que **25 = 5²**, el polinomio dado se puede expresar como una diferencia de cuadrados:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 - 25 = (z + y)^2 - 5^2}$

En su descomposición factorial, el primer factor binomio está compuesto por la diferencia entre la raíz cuadrada de la primera cantidad y la raíz cuadrada de la segunda, y el segundo factor binomio es el conjugado del primero, o sea:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 - 25 = [(z + y) - 5][(z + y) + 5]}$

De aquí que, la factorización del polinomio dado es:

$\mathbf{z^2 + 2zy + y^2 - 25 = (z + y - 5)(z + y + 5)}$

3.- Factoriza la expresión $32x^4y - 162y^2$

Se observa que ninguno de los términos es un cuadrado perfecto, pero se puede factorizar la expresión por termino común. Factorizando se obtiene:

$$32x^4y - 162y^2 = 2y(16x^2 - 81y^4)$$

En la anterior multiplicación el factor en paréntesis tiene raíces cuadradas exactas por lo que aplica la factorización vista

$32x^4y - 162y^2 = 2y\left(\sqrt{16x^2} - \sqrt{81y^4}\right) = \boldsymbol{2x(4x^2 + 9y^2)((4x^2 - 9y^2)}$

Al seguir los pasos se obtiene la factorización como se muestra anteriormente.

Factorización de una suma y la resta de 2 cubos

La suma de los cubos de dos términos algebraicos de la forma general $\mathbf{a^3} + \mathbf{b^3}$ puede descomponerse en el producto de dos factores, uno de los cuales es la suma de dichos términos $(\mathbf{a + b})$, y el otro es la suma de sus cuadrados disminuida con el producto de los dos términos. $(\mathbf{a^2 + b^2 - ab})$. Por lo que:

$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Para la resta aplica la misma regla, pero los signos de los factores cambian

$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$

Ejemplos:

1.- Descomponer en factores $\mathbf{8x^3 + 27}$

Resolución

Los términos elevados al cubo son:

$\sqrt[3]{\mathbf{8x^3}} = \mathbf{2x}$

$\sqrt[3]{\mathbf{27}} = \mathbf{3}$

El primer factor es un binomio compuesto por la suma de sus términos: $\mathbf{(2x + 3)}$

El segundo factor es un trinomio integrado por **la suma** de los cuadrados de sus términos y **la resta** del producto de ambos términos: $\mathbf{(4x^2 + 9 - 6x)}$

La factorización de $\mathbf{8x^3 + 27}$ es:

$\mathbf{8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)}$

2.- Descomponer en factores $\mathbf{x^6 - 8y^{12}}$

Resolución

Los términos elevados al cubo son:

$\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$

$\sqrt[3]{\mathbf{8y^{12}}} = \mathbf{2y^{\frac{12}{3}} = 2y^4}$

El primer factor es un binomio compuesto por la resta de sus términos: $\mathbf{(x^2 - 2y^4)}$

El segundo factor es un trinomio integrado por **la suma** de los cuadrados de sus términos y **la suma** del producto de ambos términos: $\mathbf{(x^4 + 4y^8 + x^2 2y^4)}$

La factorización de $\mathbf{x^6 - 8y^{12}}$ es:

$\mathbf{x^6 - 8y^{12} = (x^2 - 2y^4)(x^4 + 2x^2y^4 + 4y^8)}$

$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - 2ab + b^2)}$$

Actividades generales del tema factorización

Factoriza las siguientes expresiones utilizando las reglas anteriores según sea el caso

1. $8x^5y^6 - 24x^5y^4z^2 + 80x^4y^2z$
2. $\mathrm{ax} + \mathrm{a} + \mathrm{bx} + \mathrm{b}$
3. $16x^4 - 9y^2z^4 + 24x^2yz^2$
4. $x^2 + 3x - 180$
5. $a^2 + \frac{1}{5}a - \frac{2}{25}$
6. $6x^2 - 6 - 5x$
7. $(5a - 1)^2 - 100b^8$
8. $x^3y^6 - 216y^9$
9. $27m^6 - 343n^9$k

División de expresiones algebraicas

Ejemplo

1.- $\frac{6m^2+11m+5}{m+1} =$

Para resolver este tipo de ejercicios se debe de buscar una factorizar conforme al denominador para el numerador a través de la regla de factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y reduciendo se obtiene:

$$\frac{(m+1)(6m+5)}{m+1} = 6m + 5$$

Ejemplo global:

$$\frac{a^4 - a^2 - 2a - 1}{a^2 + a + 1} =$$

Resolución

Observando el numerador y denominador de la fracción se puede observar que se puede factorizar una parte del numerador por el trinomio cuadrado perfecto:

$$\frac{a^4 - (a^2 + 2a + 1)}{a^2 + a + 1} = \frac{a^4 - (a+1)^2}{a^2 + a + 1}$$

En el numerador se tiene un binomio conjugado $\frac{(a^2)^2-(a+1)^2}{a^2+a+1}$

Factorizando el Binomio conjugando $\frac{(a^2+a+1)(a^2-(a+1)}{a^2+a+1}$ por lo que $\frac{(a^2+a+1)(a^2-a-1)}{a^2+a+1}$

Reduciendo se obtiene: $a^2 - a - 1$

Actividades:

1.- $\frac{6x^2-3-3x}{2x+1} =$

2.- $\frac{a^2-6a+2a^3+a^2-12}{a^2+3} =$

2.5.- Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Las ecuaciones de primer grado son todos aquellas donde se tengan incógnitas (literales) de primer grado. (Con exponente uno) o que se puedan reducir la incógnita a exponente de grado uno.

Resolver una ecuación es calcular el valor de la incógnita que hace que sea cierta la igualdad.

A la acción de sumar o restar un mismo número a ambos miembros de una ecuación se le llama **transponer un término** de un miembro al otro con signo cambiado.

Se le llama **despejar la incógnita** a la acción de dividir a los dos miembros de la ecuación entre el coeficiente que tenga la misma.

Ejemplos:

1.- Resolver la ecuación $\mathbf{3x - 4 = 6x - 19}$

Resolución

Se aplican los axiomas relacionados con la resolución de ecuaciones, de modo que permitan ubicar a la incógnita en sólo uno de los miembros de la ecuación:

Sumando 4 a los dos miembros: (Axioma de la suma)

$\mathbf{3x - 4 + 4 = 6x - 19 + 4}$

$\mathbf{3x = 6x - 15}$

Restando 6x a los dos miembros: (Axioma de la resta)

$$\mathbf{3x - 6x = 6x - 15 - 6x}$$

$$\mathbf{-3x = -15}$$

Dividiendo toda la ecuación entre –3: (Axioma de la división)

$$\mathbf{\frac{-3x}{-3} = \frac{-15}{-3}}$$

$$\mathbf{x = 5}$$

En ciertas ocasiones se puede comprobar mentalmente en otras se debe realizar el paso a paso para dependiendo la dificultad del ejercicio siempre sustituyendo el valor que se obtiene de la incógnita.

Para este caso:

$$\mathbf{3(5) - 4 = 6(5) - 19}$$

$$\mathbf{11 = 11}$$

2.- Resuelve la ecuación $\mathbf{7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12}$

Resolución

Se suprimen los paréntesis:

$$\mathbf{126 - 7x - 18 + 30x = -7x - 9 - 6x - 15 - 12}$$

Se agrupan los términos semejantes y se reducen:

$$\mathbf{(126 - 18) + (-7x + 30x) = (-7x - 6x) + (-9 - 15 - 12)}$$

$$\mathbf{108 + 23x = -13x - 36}$$

Se trasponen los términos:

$$\mathbf{23x + 13x = -36 - 108}$$

$$\mathbf{36x = -144}$$

Se despeja x (principio de la división):

$\mathbf{x = \frac{-144}{36}}$

$\mathbf{x = -4}$

3.- Resuelve la ecuación $\mathbf{\frac{9x}{3x-1} = 2 + \frac{3}{3x-1}}$,

Resolución

Multiplicando toda la ecuación por $(\mathbf{3x-1})$:

$\mathbf{(3x-1)\left[\frac{9x}{3x-1}\right] = (3x-1)\left[2 + \frac{3}{3x-1}\right]}$

$\mathbf{9x = 2(3x-1) + 3}$

Suprimiendo el paréntesis:

$\mathbf{9x = 6x - 2 + 3}$

Transponiendo $\mathbf{6x}$ al primer miembro:

$\mathbf{9x - 6x = 1}$

$\mathbf{3x = 1}$

Despejando **x**:

$\mathbf{x = \frac{1}{3}}$

4.- Determina el valor de $\mathbf{x}$ en la ecuación $\mathbf{ax - c + bx = 2ax - d - 4bx}$ y comprueba el resultado.

Resolución

Procedimiento

$\mathbf{ax - c + bx = 2ax - d - 4bx}$

Transponiendo términos de modo que sólo la incógnita **x** quede en el primer miembro:

$$\mathbf{ax + bx - 2ax + 4bx = -d + c}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\mathbf{-ax + 5bx = -d + c}$$

Factorizando **x**:

$$\mathbf{x(-a + 5b) = -d + c}$$

Despejando **x**:

$$\mathbf{x = \frac{-d + c}{-a + 5b}}$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la suma:

$$\mathbf{x = \frac{c - d}{5b - a}}$$

Comprobación

$$\mathbf{ax - c + bx = 2ax - d - 4bx}$$

$$\mathbf{a\left(\frac{c-d}{5b-a}\right) - c + b\left(\frac{c-d}{5b-a}\right) = 2a\left(\frac{c-d}{5b-a}\right) - d - 4b\left(\frac{c-d}{5b-a}\right)}$$

Multiplicando por $\mathbf{(5b - a)}$

$$\mathbf{a(c - d) - c(5b - a) + b(c - d) = 2a(c - d) - d(5b - a) - 4b(c - d)}$$

Suprimiendo paréntesis:

$$\mathbf{ac - ad - 5bc + ac + bc - bd = 2ac - 2ad - 5bd + ad - 4bc + 4bd}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\mathbf{2ac - 4bc - ad - bd = 2ac - 4bc - ad - bd}$$

Conclusión: $\mathbf{x = \frac{c-d}{5b-a}}$

5.- Determina el valor de **x** en la ecuación $\frac{5^{2x-6} \cdot 25^{x+1} \cdot 5}{(25^{x})^{3}} = \frac{125^{x-4} \cdot 25^{7-x}}{625^{x+8}}$

Resolución

A través de las reglas de las potencias para lograr la misma base se transforma cada termino a base 5

$$\frac{5^{2x-6} \cdot 5^{2(x+1)} \cdot 5}{(5^{2x})^{3}} = \frac{5^{3(x-4)} \cdot 5^{2(7-x)}}{5^{4(x+8)}}$$

Realizando la regla de las potencias, cuando se calcula el producto de dos potencias con la misma base, se mantiene la misma base, pero se suman los exponentes.

$$\frac{5^{2x-6+2(x+1)+1}}{(5^{2x})^{3}} = \frac{5^{3(x-4)+2(7-x)}}{5^{4(x+8)}}$$

Simplificando:

$$\frac{5^{2x-6+2x+2+1}}{5^{6x}} = \frac{5^{3x-12+14-2x}}{5^{4x+32}}$$

$$\frac{5^{4x-3}}{5^{6x}} = \frac{5^{x+2}}{5^{4x+32}}$$

Regla de la división con misma base:

$$5^{4x-3-(6x)} = 5^{x+2-(4x+32)}$$

$$5^{-2x-3} = 5^{-3x-30}$$

Transponiendo de manera adecuada se obtiene:

$$\frac{5^{-2x-3}}{5^{-3x-30}} = 1$$

El término del lado derecho está sumando, pero también está multiplicando por 1 por ello se procede a resolver como lo anterior.

Regla de la división con misma base:

$$5^{x+27} = 1$$

Aplicando reglas logarítmicas se obtiene $x = -27$

El anterior ejercicio se tomó de manera práctica por que se realizan varias operaciones y reglas algebraicas para llegar a la aplicación de los logaritmos que es un tema que veras en algebra de Universidad.

6.- Al regresar, un barco de pesca tarda el doble de tiempo al remontar **40 Km** un río. Si el barco navega a **15 Km/hora** en agua quieta, ¿cuál es la velocidad de la corriente?

Resolución

La velocidad del barco se calcula por:

$$\mathbf{velocidad = \frac{distancia}{tiempo}}$$

Expresándola por literales es:

$$\mathbf{v = \frac{d}{t}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{t = \frac{d}{v}}$$

Planteamiento

$$\mathbf{Velocidad\ de\ la\ corriente = x} \qquad - - - \quad \mathbf{1}$$

$$\mathbf{Velocidad\ del\ barco\ contra\ la\ corriente = v_1 = 15 - x}$$

$$\mathbf{Velocidad\ del\ barco\ a\ favor\ de\ la\ corriente = v_2 = 15 + x}$$

$$\mathbf{Distancia\ contra\ la\ corriente = Distancia\ a\ favor\ de\ la\ corriente = 40\ Km}$$

$$\mathbf{Tiempo\ contra\ la\ corriente = t_1}$$

$$\mathbf{Tiempo\ a\ favor\ de\ la\ corriente = t_2}$$

$$\mathbf{t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{40}{15 - x}}$$

$$\mathbf{t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{40}{15 + x}}$$

De acuerdo a la información, $\mathbf{t_1 = 2\, t_2}$, por lo que, en forma de ecuación:

$$\mathbf{\frac{40}{15-x} = 2\left(\frac{40}{15+x}\right)}$$

Multiplicando toda la ecuación por el producto de los denominadores:

$$\mathbf{\frac{40(15-x)(15+x)}{15-x} = 2\left[\frac{40(15-x)(15+x)}{15+x}\right]}$$

Efectuando las operaciones señaladas:

$$\mathbf{40(15 + x) = 80(15 - x)}$$

Suprimiendo los paréntesis:

$$\mathbf{600 + 40x = 1\,200 - 80x}$$

Transponiendo términos:

$$\mathbf{40x + 80x = 1\,200 - 600}$$

$$\mathbf{120x = 600}$$

Dividiendo toda la ecuación entre **120**, se obtiene la solución:

$$\mathbf{\frac{120x}{120} = \frac{600}{120}}$$

$$\mathbf{x = 5}$$

Sustituyendo en la **ecuación 1**:

$$\mathbf{Velocidad\ de\ la\ corriente = 5\ Km/hora}$$

Actividades: encuentre los valores de x para el problema y los ejercicios

1.- En un viaje a través del Cañón del Sumidero, en Chiapas, un grupo de estudiantes de Ingeniería recorrió en mula **un tercio** de la distancia, **6 Km** en lancha, y **la mitad** de la distancia a pie. ¿Cuántos kilómetros viajó dicho grupo?

2.- Resuelve la ecuación $\mathbf{\frac{5x+8}{3x+4} = \frac{5x+2}{3x-4}}$,

3.- Determina el valor de **x** en la ecuación $\mathbf{a(3bx - 2a) = b(2a - 3bx)}$ y comprueba el resultado.

2.6.- Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación en la cual el mayor exponente de la incógnita es **2**, recibe el nombre de **ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática**. Una ecuación de segundo grado con una sola incógnita es de la forma general $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, en la que **a ≠** 0, está constituida por **3 términos**: uno tiene la incógnita con **exponente 2**, otro tiene la incógnita con **exponente 1** y el tercero no tiene la incógnita, razón por la cual es conocido como **término independiente.** Pueden ser de 2 tipos: completas e incompletas. Las primeras están formadas por a, b y c; las incompletas carecen de un valor de los mencionados.

Ecuaciones de segundo grado incompletas:

$ax^2 + c = 0$

$ax^2 + bx = 0$

$ax^2 = 0$

Ejemplos:

1. $5x^2 - 180 = 0$

Resolución:

Se resuelve de la misma manera que una ecuación de primer grado, solo que en este tipo de ecuaciones siempre se tendrán dos resultados, porque su grafica regularmente toma dos valores uno positivo y otro negativo.

$\mathbf{5x^2 - 180 = 0}$

$\mathbf{7x^2 = +180}$

$\mathbf{x^2 = 180/5}$

$\mathbf{x^2 = 36}$

$\mathbf{x = \sqrt{36}}$

$\mathbf{x = 6}$

Soluciones:

$X_1 = 6$ $X_2 = -6$

2.- Determina los valores de **x** de $\frac{x+7}{19} = \frac{5}{x-7}$

Resolución

Simplificando la ecuación:

$$(x + 7)(x - 7) = 5(19)$$

$$x^2 - 49 = 95$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm\sqrt{144} \quad \rightarrow$$

$$x_1 = 12 \quad y \quad x_2 = -12$$

3.- Calcula las raíces de $\frac{x-3}{x} = \frac{2x-5}{x}$

Resolución

Simplificando la ecuación:

$\mathbf{x(x-3) = x(2x-5)}$

$\mathbf{x^2 - 3x = 2x^2 - 5x}$

$\mathbf{2x^2 - x^2 - 5x + 3x = 0}$

$\mathbf{x^2 - 2x = 0}$

Factorizando

$\mathbf{x(x-2) = 0}$

$\mathbf{x = 0}$

$\mathbf{(x-2) = 0 \quad x = 2}$

Las raíces son: $\mathbf{x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = 2}$

4. 49x² = 0

Resolución:

Si la ecuación cuadrática solo tiene un valor (a), entonces, la solución será cero y solo en esta ocasión se tratará de un único resultado (x = 0).

Ecuación cuadrática completa

$ax^2 + bx + c = 0$

Este tipo de ecuaciones se puede resolver por el método de factorización o formula general.

Ejemplos:

1.- Resuelve la ecuación cuadrática mixta completa $\mathbf{x^2 - 5x - 36 = 0}$

Resolución

Empleando el método de descomposición en dos binomios factores de la forma $(\mathbf{x} \quad)(\mathbf{x} \quad)$, se buscan dos números que multiplicados den **–36** y sumados den **–5**:

$\mathbf{-36 = (4)(-9)}$

De esta manera:

$(\mathbf{x}+\mathbf{4})(\mathbf{x}-\mathbf{9})=\mathbf{0}$

$(\mathbf{x}+\mathbf{4})=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}=-\mathbf{4}$

$(\mathbf{x}-\mathbf{9})=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}=\mathbf{9}$

Las raíces son: $\mathbf{x_1}=-\mathbf{4}$ **y** $\mathbf{x_2}=\mathbf{9}$

2.- Resuelve la ecuación $\mathbf{3x^2+10x-8=0}$

utilizando la fórmula general $\mathbf{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

Resolución

Comparando la ecuación dada con la forma general $\mathbf{3ax^2+bx+c=0}$, se puede observar que $\mathbf{a=3, b=10\ y\ c=-8}$

Sustituyendo en la fórmula general:

$$\mathbf{x=\frac{-10\pm\sqrt{(10)^2-4(3)(-8)}}{2(3)}=\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{6}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{6}}$$

$$\mathbf{x=\frac{-10\pm14}{6}}$$

Las raíces son:

$$\mathbf{x_1=\frac{-10+14}{6} \quad \rightarrow \quad x_1=\frac{2}{3}}$$

$$\mathbf{x_2=\frac{-10-14}{6} \quad \rightarrow \quad x_2=-4}$$

3.- El análisis financiero de una empresa establece que al producir **x** cantidad de bicicletas por día, su utilidad es determinada por la expresión $\mathbf{u(x)=-0.025x^2+37x-2\,500}$.

a) ¿Cuántas bicicletas debe producir diariamente para que su utilidad sea máxima?

b) Calcula la cantidad de dinero máxima diaria que obtiene.

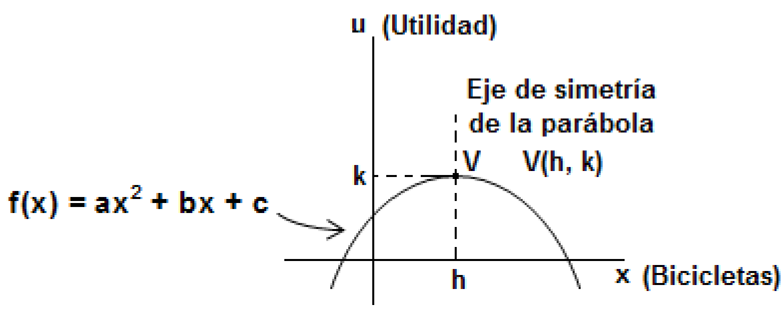
Resolución

La expresión dada es una función cuadrática cuya forma general es $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, la cual si **a ≠ 0**, representa una parábola vertical que se abre hacia abajo cuando **a < 0**.

Comparando la función $\mathbf{u(x) = -0.025x^2 + 37x - 2\,500}$ con la forma general, se puede observar que:

$\mathbf{a = -0.025, b = 37 \;\; y \;\; c = -2\,500}$

Ya que $\mathbf{-0.025 < 0}$, la parábola abre hacia abajo y las coordenadas de su vértice son **(h, k)**, cuyo bosquejo es:



La ecuación del eje de simetría de una parábola que corresponde a una función cuadrática es $\mathbf{h = \frac{-b}{2a}}$.

a) En la gráfica mostrada, la utilidad es máxima cuando $\mathbf{x = h = \frac{-b}{2a} =}$

$\mathbf{\frac{-37}{2(-0.025)} = 740}$

Se deben producir 740 bicicletas

b) Como $\mathbf{u(x) = -0.025x^2 + 37x - 2\,500}$, entonces:

$\mathbf{u(740) = -0.025(740)^2 + 37(740) - 2\,500}$

$\mathbf{u(740) = 11\,190}$

La utilidad que se obtiene es de $11 190.00

Actividades:

1. $3(x-3)^2 - 48 = 0$
2. $2x^2 + 7x - 4 = 0$
3. $3x^2 - 24x = 0$
4. $(x+5)(x-5)=7$
5. $(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$
6. En un rancho de **3 000** metros cuadrados de superficie rectangular se utilizaron **220** metros de cerca para guardar el ganado, ¿cuáles son las dimensiones del rancho?

2.7.- Sistema de ecuaciones con dos y tres incógnitas

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones en la cual se relacionan dos o más incógnitas. Resolver el sistema significa encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen dichas ecuaciones.

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según su número de soluciones:

- Incompatible, si no tiene solución.
- Compatible, si tiene solución.
  - Determinado, si la solución es única.
  - Indeterminado, si tiene infinitas soluciones.

Existen diversos métodos para solucionar sistemas de ecuaciones, a continuación, estudiaremos algunos de ellos.

Sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas

Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una incógnita de una de la ecuación y sustituir su expresión en la otra ecuación, obteniendo así una ecuación lineal de una incógnita. Al resolver esta última ecuación, podremos encontrar el valor de una incógnita y usarlo para encontrar el valor de la primera incógnita que despejamos. Veamos un ejemplo.

Dado el sistema de ecuaciones:

$-3x + 2y = 4$ (1)

$2x + y = 6$ (2)

Primero despejamos una incógnita de una ecuación; es más sencillo despejar y de (2), obtenemos:

$2x + y = 6$

$y = 6 - 2x$ (3)

Ahora sustituimos en la otra ecuación (1) el valor de la incógnita despejada.

$$-3x + 2y = 4$$
$$-3x + 2(6 - 2x) = 4$$

Resolvemos la última ecuación.

$$-3x + 2(6 - 2x) = 4$$
$$-3x + 12 - 4x = 4$$
$$-7x + 12 = 4$$
$$7x = 8$$
$$x = \frac{8}{7}$$

Obtuvimos el valor de una incógnita, x, lo usaremos para encontrar el valor de la otra incógnita; es decir, sustituiremos x por $\frac{8}{7}$ en la ecuación (3).

$y = 6 - 2(\frac{8}{7})$

Resolvemos la ecuación anterior.

$y = 6 - 2(\frac{8}{7})$

$$y = 6 - \frac{16}{7}$$
$$y = \frac{42 - 16}{7}$$
$$y = \frac{26}{7}$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{8}{7}$ y $y = \frac{26}{7}$.

Método de igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones y después igualar los resultados. Se obtendrá una ecuación lineal de una incógnita.

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$\frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{10}$ (1)

$\frac{1}{2}x - \frac{9}{10} = -\frac{1}{5}y$ (2)

Despejamos una incógnita de ambas ecuaciones, x.

De la ecuación (1)

$\frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{10}$

$\frac{2}{5}x = \frac{1}{10} - \frac{1}{4}y$

$x = \frac{5}{2}(\frac{1}{10} - \frac{1}{4}y)$

$x = \frac{1}{4} - \frac{5}{8}y$ (3)

De la ecuación (2)

$\frac{1}{2}x - \frac{9}{10} = -\frac{1}{5}y$

$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{5}y + \frac{9}{10}$

$x = 2(-\frac{1}{5}y + \frac{9}{10})$

$x = -\frac{2}{5}y + \frac{9}{5}$ (4)

Ahora igualamos los resultados.

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{8}y = -\frac{2}{5}y + \frac{9}{5}$$

Y resolvemos la nueva ecuación.

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{8}y = -\frac{2}{5}y + \frac{9}{5}$$
$$-\frac{5}{8}y + \frac{2}{5}y = \frac{9}{5} - \frac{1}{4}$$
$$\frac{-25+16}{40}y = \frac{36-5}{20}$$
$$\frac{-25+16}{40}y = \frac{36-5}{20}$$
$$\frac{-9}{40}y = \frac{31}{20}$$
$$y = \frac{-40}{9}(\frac{31}{20})$$
$$y = -\frac{62}{9}$$

Para encontrar el valor de x podemos repetir el método, despejando y de ambas ecuaciones, o sustituir el valor de y en una de las ecuaciones.

Nosotros sustituiremos el valor de y en la ecuación (3), porque x está despejada.

$x = \frac{1}{4} - \frac{5}{8}(-\frac{62}{9})$

$x = \frac{1}{4} + \frac{155}{36}$

$x = \frac{9+155}{36}$

$x = \frac{164}{36}$

$x = \frac{41}{9}$

Así que la solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{41}{9}$ y $y = -\frac{62}{9}$.

Método Grafico

Este método se explicará a través de la ecuación de la recta la cual es $y = mx + b$ se sabe que todas las ecuaciones de primer grado son rectas cuando estas se convierten en funciones por ello se despejan conforme a *y*.

Ejemplo único:

Encontrar las soluciones al siguiente sistema de ecuaciones

$$2x + 7y = 3$$

$$3x - 4y = 19$$

Se despeja cada una de las ecuaciones conforme a y de manera que sea semejante a la ecuación de la recta.

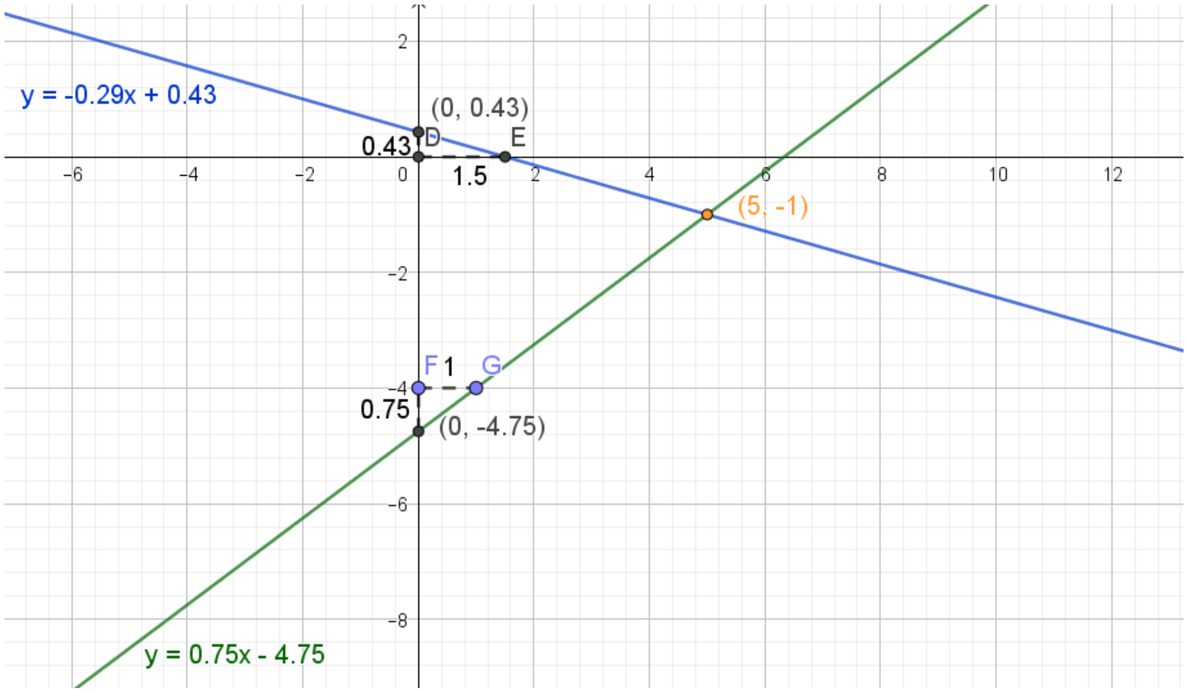
Primera ecuación:

$$7y = 3 - 2x \rightarrow y = \frac{3 - 2x}{7} \rightarrow y = -\frac{2x}{7} + \frac{3}{7}$$

Segunda ecuación:

$$-4y = 19 - 3x \rightarrow y = \frac{19 - 3x}{-4} \rightarrow y = +\frac{3x}{4} - \frac{19}{4}$$

Ahora se grafican conforme a la ecuación de la recta formando un triángulo para la pendiente(mx) y para la parte de (b) es el punto donde cruza la recta en el eje y



En las gráficas se observa claramente como el valor de la pendiente que se forma con un triángulo en el caso de $\frac{3x}{4} - \frac{19}{4}$ es para el numerador la altura o distancia en el eje (y) y para el denominador la base o la distancia de y esto por que $y = \frac{.75x}{1}$ y la interacción con el eje y se observa claramente que es -4.75 (ósea el valor de b en la ecuación). También se debe de recordar que cuando la pendiente es positiva la recta cruza los cuadrantes 1 y 3 y cuando es negativa la recta cruza los cuadrantes 2 y 4. Si se realiza a mano con una regla se pueden precisar las soluciones para este caso X=5 e y=-1 (5,-1).

Es importante que como practica tomes en cuanta graficar las ecuaciones para conocer todo el análisis que existe en ellas y aprender más con el simple hecho de visualizar deductivamente.

Sistema de ecuaciones lineales de tres incógnitas

Método de sustitución

De manera similar al método aplicado para sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas, despejamos una incógnita de una de las ecuaciones y sustituimos su valor en las otras dos ecuaciones. En este caso obtendremos un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas que podemos resolver con los métodos estudiados anteriormente. Sólo nos falta obtener el valor de la incógnita despejada al inicio, para obtenerlo, sustituiremos el valor de las otras dos incógnitas a una de las ecuaciones donde aparece la incógnita que nos interesa. A continuación, se presenta un ejemplo.

Resolveremos el sistema de ecuaciones
$x - y + z = 4$ (1)
$2x + y - z = 5$ (2)
$x + 3y - 4z = -5$ (3)

Primero despejamos una incógnita de una ecuación, x de la ecuación (1)
$x - y + z = 4$
$x = 4 + y - z$ (4)

Ahora sustituimos su valor en las otras dos ecuaciones.
En la ecuación (2)
$2x + y - z = 5$
$2(4 + y - z) + y - z = 5$
$8 + 2y - 2z + y - z = 5$
$3y - 3z = -3$
$y - z = -1$ (5)
En la ecuación (3)
$x + 3y - 4z = -5$
$(4 + y - z) + 3y - 4z = -5$
$4y - 5z = -9$ (6)

Solucionaremos el sistema que obtuvimos con el método de nuestra preferencia, resolveremos las ecuaciones (5) y (6) con el método de sustitución.
Nuevo sistema: $y - z = -1$ (5)
$4y - 5z = -9$ (6)
Comenzamos por despejar y en la ecuación (5).
$y - z = -1$
$y = -1 + z$ (7)
Sustituimos el valor de y en la ecuación (6).
$4y - 5z = -9$
$4(-1 + z) - 5z = -9$
$-4 + 4z - 5z = -9$
$-z = -5$
$z = 5$

Sustituimos el valor de z en la ecuación (7) ya que tiene a z despejada.

$$y = -1 + z$$
$$y = -1 + 5$$
$$y = 4$$

Encontramos que $y = 4$y $z = 5$. Nos falta encontrar el valor de x, para ello sustituiremos los valores de y y z en la ecuación (4), pues es la ecuación donde x está despejada, así que nos simplifica el proceso, pero podemos usar cualquiera de las ecuaciones donde aparece x.

$x = 4 + y - z$
$x = 4 + 4 - 5$
$x = 3$

Hemos terminado. La solución del sistema es $x = 3$, $y = 4$y $z = 5$.

Regla de Cramer

Primero, aprendamos a calcular el determinante de una matriz de 3x3. Dada la matriz

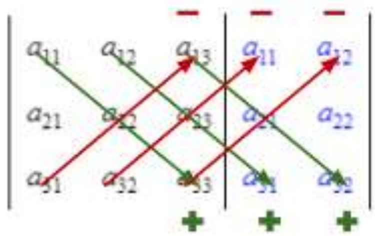
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La ***Regla de Sarrus*** aplicada a la matriz, establece que su determinante se calcula como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$det\ (A) == a_{11}a_{22}\ a_{33} + a_{12}a_{23}\ a_{31} + a_{13}a_{21}\ a_{32}$- $a_{31}a_{22}\ a_{13} - a_{32}a_{23}\ a_{11} - a_{33}a_{21}\ a_{12}$

No es necesario memorizar la expresión final. Para aplicar esta regla, agregamos las columnas 1 y 2 a la derecha del determinante. Después multiplicamos los términos que están en una misma flecha. Las flechas verdes nos indican que el resultado se sumará y las flechas rojas nos indican que el resultado se restará.



Sigamos con la *regla de Cramer*. Dado el sistema de ecuaciones

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

donde x, y y z son incógnitas.

Definimos el determinante general, o determinante de la matriz de coeficientes, como:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

La solución del sistema es $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ y $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$, donde Δx, Δy y Δzson los determinantes que se obtienen al sustituir los coeficientes de la incógnita correspondiente por los términos independientes. Notemos que sólo podemos usar este método cuando $\Delta \neq 0$, pues en caso contrario tendríamos una división por 0.

Por ejemplo, Δy es:

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Resolvamos el siguiente sistema usando la regla de Cramer.

$$m + 3n + p = 8$$
$$-2m + 5n + p = 6$$
$$-m + 6n - p = 10$$

Primero calculemos el determinante general.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} \qquad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right|$$

$$= 1(5)(-1) + (3)(1)(-1) + (1)(-2)(6) - (-1)(5)(1) - (6)(1)(1) - (-1)(-2)(3) =$$
$$-5 - 3 - 12 + 5 - 6 - 6 = -27$$

Como el determinante general es distinto de cero, continuamos con los otros determinantes.

$$\Delta m = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 10 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 8(5)(-1) + (3)(1)(10) + (1)(6)(6) - (10)(5)(1) - (6)(1)(8) -(-1)(6)(3) = -40 + 30 + 36 - 50 - 48 + 18 = -54$$

$$\Delta n = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ -1 & 10 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6)(-1) + (8)(1)(-1) + (1)(-2)(10) - (-1)(6)(1) -(10)(1)(1) - (-1)(-2)(8) =$$
$$-6 - 8 - 20 + 6 - 10 - 16 = -54$$

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5)(10) + (3)(6)(-1) + (8)(-2)(6) - (-1)(5)(8) - (6)(6)(1) - (10)(-2)(3)$$
$$= 50 - 18 - 96 + 40 - 36 + 60 = 0$$

Por lo tanto:

$$m = \frac{\Delta m}{\Delta} = \frac{-54}{-27} = 2$$
$$n = \frac{\Delta n}{\Delta} = \frac{-54}{-27} = 2$$
$$p = \frac{\Delta p}{\Delta} = \frac{0}{-27} = 0$$

Actividades

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

I. $-4x + \frac{2}{7}y = 0$

$2x - \frac{1}{7}y + 5 = 0$

II. $2y + x = 2x$

$y - 4x = 0$

III. $x - 2y + 3z = 10$

$2x + y - 6z = 1$

$x + 3y - 9z = -9$

IV. $a - c = 8$

$b - 2c = 4$

$a + b = 3$

2.8.- Aplicación del álgebra en problemas cotidianos

I. Una persona tiene 52 monedas, algunas de \$5 y otras de \$2. Supone que en total tiene \$195. ¿Contó bien el dinero? Justifica tu respuesta.

Resolución

Sean x el número de monedas de \$5 y y el número de monedas de \$2.

Sabemos que:

$x + y = 52$ (1)

$5x + 2y = 195$ (2)

Resolveremos el sistema usando el método de sustitución. Primero, despejamos x en la ecuación (1) y obtenemos

$x = 52 - y$ (3)

Sustituimos el valor de x en (2).

$$5(52 - y) + 2y = 195$$

$$260 - 5y + 2y = 195$$

$$3y = 65$$

$$y = \frac{65}{3}$$

Sustituimos el valor de y en (3).

$x = 52 - \frac{65}{3}$

$x = \frac{156-65}{3}$

$x = \frac{91}{3}$

Respuesta: No, porque necesitaría tener un número no entero de monedas.

II. Alfredo y Mónica compraron frutas. Alfredo pagó $78 por 2 kg de manzana y 1 kg de uva, mientras que Mónica pagó $42 por $\frac{1}{2}$kg de manzana y 1 kg de uva. ¿Cuánto cuesta 1 kg de manzana?

Resolución

Sean x el precio de un kilo de manzanas y $y$el precio de un kilo de uvas.
Tenemos que

$2x + y = 78$ (1)

$\frac{1}{2}x + y = 42$ (2)

Usaremos el método de igualación para resolver el sistema de ecuaciones.

Comenzamos por despejar y en ambas ecuaciones, obtenemos:

$y = 78 - 2x$ (3)

$y = 42 - \frac{1}{2}x$ (4)

Igualamos los valores de y y resolvemos la ecuación.

$$78 - 2x = 42 - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{3}{2}x = 36$$

$$x = 24$$

No es necesario calcular y, porque sólo nos piden el precio del kilo de manzana, pero lo obtenemos así: sustituimos el valor de x en (3).

$$y = 78 - 2(24)$$

$$y = 30$$

Respuesta: El kilo de manzana cuesta $24.

III. José compró cierto día 3 paletas, 5 helados y 2 dulces, por todo pagó $28. Al día siguiente, adquirió 4 paletas, 3 helados y 5 dulces con $25. Y el último día, una paleta, un helado y un dulce le costaron $7. ¿Cuál es el costo de cada golosina?

Sean x el precio de la paleta, y el precio del helado y z el precio del dulce.

Resolución

El sistema de ecuaciones que planteamos para resolver el problema es:

$$3x + 5y + 2z = 28$$

$$4x + 3y + 5z = 25$$

$$x + y + z = 7$$

Usemos la regla de Cramer.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(3)(1) + 5(5)(1) + 2(4)(1) - 1(3)(2) - 1(5)(3) - 1(4)(5)$$

$$= 9 + 25 + 8 - 6 - 15 - 20 = 1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 28 & 5 & 2 \\ 25 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 28(3)(1) + 5(5)(7) + 2(25)(1) - 7(3)(2) - 1(5)(28) - 1(25)(5)$$

$$= 84 + 175 + 50 - 42 - 140 - 125 = 2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 28 & 2 \\ 4 & 25 & 5 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 3(25)(1) + 28(5)(1) + 2(4)(7) - 1(25)(2) - 7(5)(3) \\ &\quad - 1(4)(28) \\ &= 75 + 140 + 56 - 50 - 105 - 112 = 4 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 28 \\ 4 & 3 & 25 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 3(3)(7) + 5(25)(1) + 28(4)(1) - 1(3)(28) - 1(25)(3) \\ &\quad - 7(4)(5) \\ &= 63 + 125 + 112 - 84 - 75 - 140 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$$

Respuesta: Paleta \$2, helado \$4 y dulce \$1.

Actividades

1. Una persona invierte en una cuenta a plazo fijo una cantidad de dinero, obteniendo un 6% de intereses. En otro banco invierte otra cantidad obteniendo 4% de intereses. Si en total invirtió 10000 pesos, y los intereses de la primera inversión superan en 200 pesos a los de la segunda, ¿cuánto dinero invirtió en cada cuenta? Respuesta: \$6000 en el primer banco y \$4000 en el segundo.

2. El propietario de una tienda hace una mezcla especial de café supremo de Colombia que cuesta 4.99 dólares por libra y mocha de java, cuesta 5.99 dólares por libra; la mezcla se vende en 5.39 dólares la libra. Si la mezcla se hace de 50 lotes ¿Cuántas libras de cada tipo debe utilizar?

3. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C ¿Cuántos gramos hay que tomar de cada uno de los tres lingotes? Respuesta: 25 g del primer lingote, 50 g del segundo y 25 g del tercero.

Referencias

Baldor, D. A. (2009). *Aritmética*. Grupo Editorial Patria.México

Baldor, D. A. (2010). *Álgebra*. Grupo Editorial Patria. México

Barnett, R. A. (1984). *Álgebra*. Mc Graw Hill. México

Becerra, J. s.f. Matrices y Determinantes, tema V, Colegio de Matemáticas de la ENP- UNAM. p.p. 1-30 http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/pdf/m63unidad05.pdf

Cohaguila, S. s.f., Cocientes Notables. I Ciencias Básicas. https://ciencias-basicas.com/matematica/elemental/operaciones-algebraicas/cocientes-notables/

Despeje de fórmulas, s.f. Proyecto Guao. p.p.1-9 https://guao.org/sites/default/files/Despeje%20de%20F%C3%B3rmulas.pdf

Encabo, J.A. y Cuchillo, E. (2015). Matemáticas 1, Bachillerato de Ciencias. *Sistema de ecuaciones, método de Gauss.* Matemáticas Online. p.p. 1-14 https://wwwopeo.matematicasonline.es/BachilleratoCCNN/Segundo/ejercicios/1-sistemas-Gauss.pdf

González, S. W. (2016). Guías de estudio nivel bachillerato. Xalapa.

IES, s.f. Ejercicios sobre problemas con Fracciones. I.E.S. Torre Almirante, Dpto. Matemáticas. p.p. 1-4 http://matematicas.torrealmirante.net/TERCERO%20ESO/actividades/fracciones1.pdf

Martín, C. (2015). Matemáticas preparación prueba de acceso a ciclos de grado superior, soluciones 03. Matemáticas Acceso Ciclos Cepas. P.p 1-3 https://matematicasciclоscepas.files.wordpress.com/2015/02/03-soluciones-blog-g-s1.pdf

Monge, J. (2020). Ejercicios de Álgebra de Pearson. Problemas aplicando el sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Wordpress. https://ejerciciosalgebradepearson.wordpress.com/2020/05/23/problemas-aplicando-el-sistema-de-3-ecuaciones-lineales-con-3-incognitas/

Morales, F. (2019). *Curso de Inducción a Matemáticas*. Instituto Tecnológico Superior de Xalapa.

Peterson, J. C. (2000). *Matemáticas Básicas*. Cecsa. México

UTN, (2019). Notación científica. Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional La Rioja. p.p. 1-6. http://www.frlr.utn.edu.ar/archivos/alumnos/ApuntesIngreso2019/notacion_cientifica.pdf